

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

ANÁLISE LIMITE DE SISTEMAS ESTRUTURAIS RETICULARES

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA.

IVO CESAR MARTORANO

FLORIANÓPOLIS, OUTUBRO, 1986.

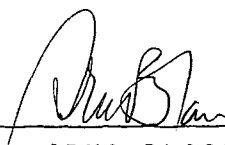
## ANALISE LIMITE DE SISTEMAS ESTRUTURAIS RETICULARES

IVO CESAR MARTORANO

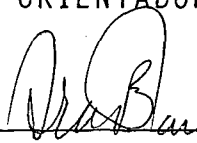
ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO  
DO TÍTULO DE

"MESTRE EM ENGENHARIA"

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO "PROJETO" ,  
E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGE-  
NHARIA MECÂNICA



ARNO BLASS  
ORIENTADOR

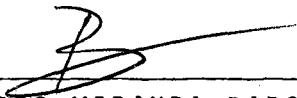


ARNO BLASS  
COORDENADOR

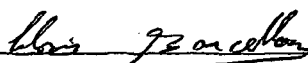
BANCA EXAMINADORA:



ARNO BLASS, Ph.D.  
PRESIDENTE



RICARDO MIRANDA BARCIA, Ph.D.



CLOVIS SPERB DE BARCELLOS, Ph.D.

Dedicado à memória de meu pai,  
e à minha mãe.

### AGRADECIMENTOS

Aos Professores do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, em especial ao Profº Arno Blass, pela orientação e apoio por mim recebidos.

Ao Profº Ricardo Miranda Barcia por muitas valiosas sugestões e ao Profº Sérgio Fernando Mayerle pela gentil cessão do programa PROJECT.

Aos colegas da PG, em especial Nicodemos, pela ajuda prestada.

Aos funcionários da PG, em especial Vera.

A Roberto e Marlei que datilografaram o trabalho.

# INDICE

Cap. 1.	Introdução.....	01
1.1.	Generalidades .....	01
1.2.	Histórico .....	05
1.2.a.	Condição de Escoamento para Seções Transversais...	07
1.2.b.	Análise Limite de Estruturas Reticulares .....	08
1.3.	Objetivos e Justificativas .....	12
1.4.	Organização do Trabalho .....	13
Cap. 2.	Modelagem Matemática da Análise Limite .....	15
2.1.	Introdução .....	15
2.2.	Hipóteses Principais e Notação .....	16
2.3.	Relações Principais e Princípios de Extremo .....	18
2.4.	Modelos Matemáticos para a Análise Limite .....	22
2.4.a.	Formulação Estática .....	25
2.4.b.	Formulação Cinemática .....	27
2.5.	Relações de Dualidade .....	29
2.6.	Relações Constitutivas LPP .....	30
2.7.	Alguns Aspectos Qualitativos .....	32
Cap. 3.	Análise Limite de Estruturas Reticulares .....	36
3.1.	Introdução .....	36
3.2.	Elemento Genérico da Estrutura .....	37
3.2.a.	Relações entre Resultantes de Tensões .....	39
3.2.b.	Relações entre Taxas de Deformação .....	43
3.2.c.	Relações Constitutivas LPP .....	44
3.3.	Montagem da Estrutura .....	49
3.3.a.	Velocidades Generalizadas e Esforços Externos ....	50

3.3.b.	Relações de Compatibilidade e Equilíbrio .....	51
3.4.	Análise Limite .....	56
Cap. 4.	Determinação de Condições de Escoamento LPP .....	57
4.1.	Introdução .....	57
4.2.	Relações Constitutivas para um Elemento Individual ..	57
4.3.	Seção Transversal Montada .....	63
4.4.	Geração das Condições de Escoamento LPP .....	67
Cap. 5.	Resultados e Conclusões .....	70
5.1.	Introdução .....	70
5.2.	Quadro plano Simples .....	70
5.3.	Seção I .....	74
5.4.	Comentários sobre as formulações apresentadas .....	76
5.5.	Conclusões .....	78
5.6.	Recomendações para próximos trabalhos .....	79

## Lista de Símbolos

- $A, \bar{A}^*$  - Matriz booleana que identifica as resultantes de tensões consideradas nos elementos.
- $B, \bar{B}^*$  - Matriz de transformação estática, sua transposta é a matriz de transformação cinemática.
- $C, \bar{C}^*$  - Operador de compatibilidade; seu transposto é o operador de equilíbrio
- $c, \bar{c}^*$  - Matriz booleana que identifica os deslocamentos ativos nos pontos nodais.
- $\dot{D}$  - Taxa de dissipação de energia.
- $D, \bar{D}^*$  - Matrizes de transformação do sistema local para o global.
- $\underline{F}, \underline{\bar{F}}^*$  - Vetor que representa os esforços externos aplicados.
- LPP - Linearizado por partes.
- $\mathcal{L}$  - Função de Lagrange.
- $l$  - Comprimento.
- $M_x, M_y$  - Momentos fletores nas direções  $x$  e  $y$ , ou componentes flexionais do vetor resultantes de tensão não naturais.

- $N, \bar{N}^*$  - Matriz das normais unitárias às superfícies do critério de escoamento linearizado.
- $n, \bar{n}^*$  - Matriz das normais unitárias à superfície de escoamento normalizada.
- PL - Programação Linear.
- PNL - Programação Não-Linear.
- PM - Programação Matemática.
- $P_z$  - Força normal, ou componente axial do vetor de tensões generalizadas não natural.
- $Q_0$  - Tensão de escoamento.
- $\underline{Q}, \underline{\bar{Q}}^*$  - Vetor tensão generalizada.
- $\dot{\underline{q}}, \dot{\underline{\bar{q}}}^*$  - Vetor taxas de deformação naturais.
- $q$  - Deformação.
- $R, \bar{R}^*$  - Distância da origem do espaço tensão até a superfície do critério de escoamento linearizado.
- $\underline{R}, \underline{\bar{R}}^*$  - Vetor resultante de tensões internas para uma seção  $j$ .
- $\underline{\dot{r}}$  - Vetor taxas de deformação não naturais, referido ao sis



tema local.

$\underline{\dot{r}}$  - Vetor taxas de deformação não-naturais referidos ao sistema global.

$\underline{S}, \underline{S}^*$  - Vetor tensões ativas generalizadas.

$\underline{\dot{s}}$  - Vetor taxas de deformação ativas.

$T_z$  - Momento torçor.

$\underline{\dot{s}}, \underline{\dot{s}}^*$  - Vetor taxas de deformação ativas.

$\underline{\dot{u}}$  - Vetor taxas de deslocamento, e/ou multiplicador de Lagrange.

$V_x, V_y$  - Componentes cisalhantes do vetor de resultantes de tensão não naturais.

$\dot{v}_x, \dot{v}_y$  - Componentes do vetor taxa de deformação correspondentes aos cisalhamentos no sentido x e y.

$X, X^*$  - Matriz normalizadora.

$\dot{W}$  - Potência realizada pelos esforços externos.

$w$  - Constante arbitrária.

$\alpha, \alpha^*$  - Fator de carga ou multiplicador de colapso.

- $\gamma_{xz}, \dot{\gamma}_{yz}$  - Componentes cisalhantes do vetor taxas de deformação.
- $\dot{\Delta}_z$  - Componente axial do vetor taxas de deformação.
- $\dot{\epsilon}_z$  - Componente axial do vetor taxas de deformação.
- $\underline{\dot{\epsilon}}$  - Vetor componentes de deformação no ponto.
- $\dot{\theta}_x, \dot{\theta}_y$  - Componentes do vetor taxas de deformação correspondentes aos momentos fletores  $M_x$  e  $M_y$ .
- $\underline{\theta}$  - Vetor nulo.
- $\underline{\dot{\lambda}}$  - Vetor taxa de variação dos multiplicadores plásticos, e ou multiplicador de Lagrange.
- $\sigma_0$  - Tensão de escoamento.
- $\sigma_z$  - Tensão normal.
- $\underline{\sigma}$  - Vetor componentes de tensão em um ponto.
- $\tau_0$  - Tensão de escoamento cisalhante.
- $\tau_{xz}, \tau_{yz}$  - Tensões cisalhantes.
- $\underline{\phi}$  - Função potencial plástico generalizado.

$\dot{\psi}_z$  - Componente torcional do vetor taxas de deformação.

#### Observações:

Índices subscritos ou superscritos  $j$  e  $k$  indicam uma seção particular, índices  $i$  referem-se a um elemento particular.

Um til, superposto a um vetor ou matriz indica transposição.

Um asterisco superposto a um vetor ou matriz indica que esta grandeza relaciona-se à análise de seções transversais.

A barra inclinada ( $/$ ), indica a condicionante matemática "tal que".

## RESUMO

Neste trabalho, apresenta-se uma formulação geral em termos de Programação Matemática para a Análise Limite de estruturas reticulares rígido-plásticas.

Esta formulação é apresentada como a aplicação dos princípios da máxima potência das forças externas para um vetor tensão generalizada no colapso plástico, e de seu dual, o princípio da mínima dissipação de energia para um vetor taxas de deslocamento no colapso, estes anteriormente estabelecidos pela aplicação da teoria de Karush-Kuhn-Tucker à descrição do comportamento do material rígido-plástico.

Ao se aplicarem estes princípios a descrições discretizadas de sistemas estruturais, obtêm-se os enunciados em termos de Programação Matemática dos clássicos teoremas da Análise Limite. Através da linearização da condição de escoamento, estes modelos tornam-se problemas de Programação Linear. Através de técnicas matriciais, é apresentada uma descrição nodal para estruturas compostas de elementos prismáticos, bem como seções transversais discretizadas em elementos de tensão constante plana.

A partir dos dados do material, propriedades de seção e descrição geométrica, a análise é realizada de forma automática, semelhante à análise elástica convencional, permitindo-se a consideração de efeitos de tensões combinadas. A análise é realizada através de um pacote computacional de Programação Linear de uso geral. Por último, são apresentadas aplicações a estruturas típicas e seções transversais.

## ABSTRACT

In this work a general formulation to the Limit Analysis of skeletal structures in terms of Mathematical Programming is presented.

The formulation is presented as a result of the application of the maximum power of external loads principle to a generalized stress vector at collapse, and his dual, the minimum dissipation energy rate principle, to a displacement rate vector at collapse, both established by applying the Karush-Kuhn-Tucker theory to the rigid-plastic material description.

Applying these principles to discretized description of structural systems, the Mathematical Programming versions of the classical Limit Analysis theorems are obtained. Through linearizing the yield conditions the models are cast in the form of linear Programming formulations. A matrix nodal description to skeletal structures is presented, as well as to transversal sections discretized through constant stress elements.

From material data, section properties and geometrical description the analysis is made on an automatic fashion, similar to the conventional elastic linear analysis, considering the effect of combined stresses. The analysis is achieved by means of a general purpose Linear Programming package. At last, some examples of application to current structures and transversal sections are presented.

## CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO

### 1.1. Generalidades

Os materiais sólidos exibem maior variedade de comportamentos mecânicos do que líquidos e gases. Por isso, estabelecer modelos matemáticos que descrevam a totalidade dos fenômenos associados à solicitação mecânica destes corpos (como resposta elástica, e feitos viscosos, histerese, fluência e escoamento plástico), ainda que possível, torna-se inconveniente na solução de problemas de engenharia. Desta forma, utilizando-se equações simplificadas que representem apenas aquelas propriedades relevantes ao problema à mão, pode-se tratá-lo de forma mais eficiente. Na análise de tensões e deformações em elementos de máquinas e estruturas a escolha do modelo a ser usado exige, naturalmente, conhecimento e experiência.

Os modelos simplificados nos levam ao conceito de material ideal<sup>[1]</sup>, dos quais o mais conhecido é o que segue o modelo elástico estabelecido por Hooke. Os métodos de análise baseados no modelo de Hooke pertencem ao escopo da elasticidade, responsável por grandes progressos nas áreas de análise estrutural, elementos de máquinas e mecânica dos solos. No entanto, os materiais apresentam resposta elástica a níveis de tensão relativamente baixos. Em estruturas e elementos de máquinas existem defeitos de fabricação que originam tensões internas, defeitos de montagem que introduzem sobrecargas, aparecem tensões térmicas, locais de descontinuidade de tensões e esforços não previstos pela teoria que,

fazem os limites elásticos serem superados com frequência, justificando-se a necessidade de métodos de análise que forneçam informações sobre o comportamento do elemento ou estrutura além da fase dita elástica [2].

Alguns dos materiais utilizados em estruturas e elementos mecânicos apresentam comportamento muito próximo ao do modelo conhecido como "elástico perfeitamente plástico". Estes materiais são o aço doce e algumas ligas de alumínio, que apresentam a propriedade de escoar continuamente sob níveis de tensão constante, propriedade esta conhecida como ductilidade.

Como consequência do escoamento, observam-se deformações permanentes. De uma forma geral, pertence ao escopo da Plasticidade o estudo do comportamento mecânico de materiais que apresentam deformações permanentes. Nas figuras 1.1.a, 1.1.b, 1.1.c. são mostrados os diagramas tensão-deformação para o aço doce e ligas de alumínio

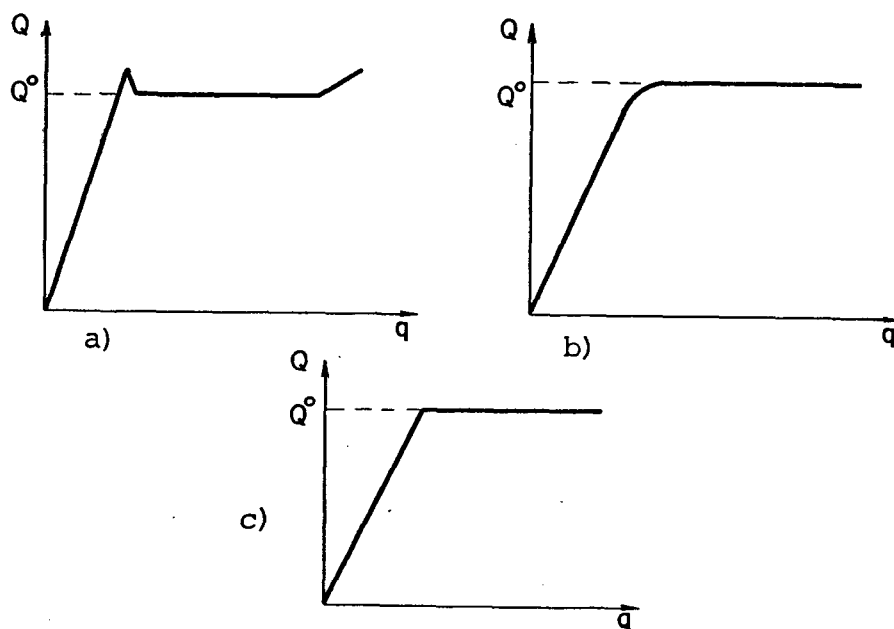


Fig. 1.1. Diagramas tensão deformação. a) Aço doce. b) Ligas de alumínio. c) Material elastoplástico.

e o modelo elástico perfeitamente plástico, respectivamente. A análise do comportamento mecânico de um corpo ou sistema estrutural elastoplástico é referida como o problema estrutural da Plasticidade, ou Plasticidade Estrutural<sup>[3]</sup>. Dois tipos de problemas são tratados em Plasticidade Estrutural: o da análise, que consiste na determinação da resposta do sistema estrutural aos carregamentos impostos, que podem ser monotonicamente crescentes ou cíclicos; e o problema de projeto, que consiste em determinar parâmetros como a geometria da estrutura ou a distribuição de materiais para atender determinadas restrições do comportamento, sob solicitações monotonicamente crescentes ou cíclicas.

No modelo citado acima as deformações plásticas aparecem sob um nível de tensão constante, chamado "limite de escoamento" ("yield limit"); entretanto, alguns materiais (aços encruáveis) apresentam deformações plásticas sob tensões crescentes, ou encruamento ("hardening"). Neste trabalho, será abordado um importante tópico do problema da análise conhecido como Análise Limite, aqui restrito a sistemas estruturais compostos por elementos de barra cujo material tem comportamento elástico perfeitamente plástico.

A Análise Limite trata da determinação da máxima amplificação de carga (fator de carga, ou segurança) que pode ser sustentada por uma estrutura elastoplástica submetida a um carregamento especificado. Além do fator de carga, a análise permite obter informações sobre as tensões na estrutura e o mecanismo de colapso. Em uma estrutura indeterminada ("hiperestática") a ocorrência de escoamento plástico não significa necessariamente a perda da capacidade de resistir aos carregamentos, ou o colapso. A determina



ção da reserva de resistência da estrutura sô pode ser feita através da análise elastoplástica. Considerando a hipótese de pequenos deslocamentos e ausência de instabilidade impõe-se que as condições de equilíbrio e compatibilidade sejam satisfeitas por relações lineares a partir da configuração inicial da estrutura. Como os deslocamentos não são objeto da análise, uma simplificação adicional é realizada considerando-se um modelo de material rígido-plástico (fig. 1.2). O material obedece o critério de escoamento de von Mises, e os postulados para a unicidade e a estabilidade das soluções de Drucker<sup>[3]</sup> são satisfeitos. A estrutura é constituída de elementos lineares com seções transversais com dupla si

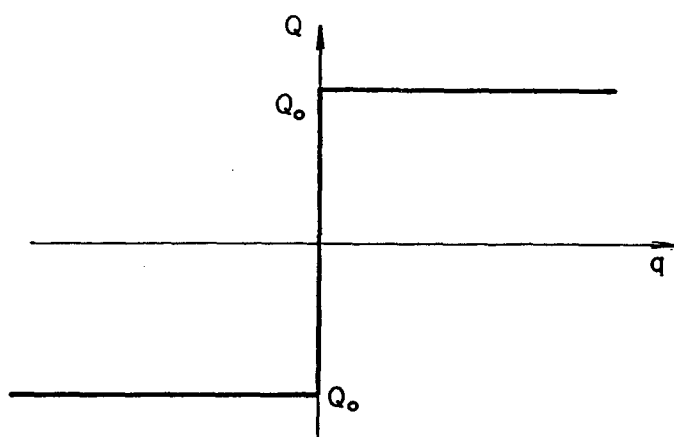


Fig. 1.2. Diagrama tensão deformação para material rígido-plástico.

metria. Estas hipóteses permitem verificar a validade dos resultados para uma ampla gama de sistemas estruturais comprovados experimentalmente nos trabalhos de Baker<sup>[4]</sup>.

A estrutura é considerada como uma montagem de elementos de vigas, cujos parâmetros estão concentrados em pontos nodais (descrição nodal). Considerando-se uma única resultante de tensões, a condição

de escoamento torna o problema linear. Quando ocorre a iteração de duas ou mais resultantes de tensão o critério de escoamento torna-se uma função convexa não linear tendo estas resultantes como argumentos. Sob hipóteses adequadas adota-se uma descrição linearizada das condições de escoamento e da regra de escoamento (linearizadas por partes) que torna, o problema linear, ao custo de um número aumentado de equações. Quando não se tem diretamente a função de escoamento, pode-se, de forma análoga à análise da estrutura, determinar os pontos que caracterizam a descrição linearizada da função de escoamento. A seção transversal discretizada é a "estrutura", as resultantes de tensões ativas são as "cargas aplicadas" correspondentes e a análise limite envolve a determinação da "capacidade plástica" da seção transversal sob resultantes de tensão crescentes [5].

## 1.2. Histórico

Em Plasticidade, é fundamental o estudo de duas condições que especificam o comportamento plástico dos materiais. A primeira delas, a condição de escoamento ("yield condition"), especifica o nível de tensão para o início do escoamento plástico. A segunda, conhecida como regra de escoamento ("flow rule"), fornece as taxas de deformação plástica correspondentes ao nível de tensão sob o qual se iniciou o escoamento.

St Venant [6] e Lévy [7], quando enunciaram os fundamentos da Plasticidade, usaram uma condição de escoamento enunciada anteriormente por Tresca, [8], baseada em dados experimentais; a re

gra de escoamento adotada foi inspirada na Teoria da Elasticidade. Mais tarde, R. von Mises<sup>[9]</sup> em um desenvolvimento, manteve a regra de escoamento, mas alterou a condição de Tresca para uma forma matematicamente mais conveniente. Nestes primeiros tempos, tanto a condição de escoamento como a regra de escoamento foram tratadas como elementos distintos da teoria. A possibilidade de se obter a regra de escoamento a partir da condição de escoamento foi postulada por R. von Mises, [10] através do conceito do "potencial plástico". Inicialmente, estes conceitos foram restritos para o caso de a condição de escoamento ser descrita por uma função convexa, contínua, sem pontos de singularidade. Koiter<sup>[11]</sup> generalizou estes conceitos para funções com pontos de singularidade, chamando-a de "Teoria do potencial plástico generalizado".

Até o final dos anos 50 chegou-se a estabelecer o que é chamado Teoria Clássica da Plasticidade, bem descrita nas obras de Hill<sup>[12]</sup>, Prager & Hodge<sup>[13]</sup>, e outros. Um apanhado histórico bastante detalhado, citando as contribuições principais e trazendo completa bibliografia, pode ser encontrada na obra de Martin<sup>[3]</sup>, e em Koiter<sup>[14]</sup>.

O estabelecimento de princípios variacionais de extremo, adequados ao tratamento numérico são devidos a Hill<sup>[15]</sup> e Markov<sup>[16]</sup>, e valem para materiais que obedecem ao critério de Mises. Para materiais que apresentam encruamento, os princípios análogos devem-se a Sadowsky<sup>[17]</sup>, e Kachanov<sup>[18]</sup>, respectivamente. O estabelecimento da correspondência entre as relações constitutivas da Plasticidade e as condições de Karush-Kuhn-Tucker é em grande parte devida a Maier<sup>[19]</sup>, onde, a partir daí, são estabelecidas im

portantes ligações entre as relações constitutivas, os teoremas clássicos da Análise Limite e os princípios de extremo. Desta forma, foram estabelecidos importantes elos de ligação entre a Teoria da Plasticidade e a Análise Limite.

Neste trabalho, serão abordados os pontos fundamentais da Análise Limite, como sejam determinação da capacidade de resistência de seções planas sob esforços combinados e a carga de colapso de sistemas estruturais. Estes pontos, bem como as abordagens mais em uso na Plasticidade, tem desenvolvimento relativamente recente e tentar estabelecer um apanhado histórico detalhado foge ao escopo deste trabalho. Desta forma, serão apresentadas, separadamente, as principais contribuições a ambos os pontos e serão fornecidas as referências onde esta questão é detalhadamente abordada.

#### 1.2.a. Condição de Escoamento para Seções Transversais

Serão consideradas seções solicitadas sob esforços normais, fletores e torçores. Tal simplificação é justificada pelo fato das tensões cisalhantes não influírem decisivamente na carga de colapso, pelo menos nos tipos de estruturas que serão aqui consideradas<sup>[20]</sup>. Na obra de Hodge<sup>[20]</sup>, o assunto é devidamente explorado e são fornecidas referências. Para o caso de seções solicitadas sob uma resultante de tensão, referência é feita às obras clássicas de Hill<sup>[12]</sup>, Johnson & Mellor<sup>[21]</sup>, Massonet-Save<sup>[2]</sup>.

Para a flexão e torção combinadas, Handelman<sup>[22]</sup> e Hill<sup>[15]</sup> mostram que o problema se reduz a uma equação diferencial parcial não-linear, até agora sem solução exata. Steele<sup>[23]</sup> obteve uma

solução numérica pelo método das diferenças finitas. Hill & Siebel [24] apresentam uma solução que estabelece limites superiores e inferiores ("upper and lower bounds") para as cargas de colapso de seções circulares. Gaydon & Nuttal [25] usaram a mesma abordagem para seções circulares, retangulares, "I" e caixão. Hodge [20] considerou o problema como sendo de tensão plana, e relaxou as condições de equilíbrios localizadas através do uso do conceito de tensões generalizadas. Em seu trabalho o problema foi formulado como de maximizar as resultantes de tensões sob as restrições do critério de von Mises. Morris & Fenves [26] utilizaram o método de Hodge para estabelecerem equações aproximadas que descrevem a superfície de escoamento de diversos tipos de seções. Grierson & Baset [27] mostraram que a determinação das condições de escoamento é análoga à análise limite. Esta formulação é a apresentada neste trabalho.

#### 1.2.b. Análise Limite de Estruturas Reticulares.

A Kazinczy [28] na Hungria e Kist [29] na Holanda são atribuídos os primeiros trabalhos publicados sobre vigas fora da fase elástica. Kazinczy reconheceu o conceito de rótula plástica e lhe são creditados os trabalhos seminais em métodos plásticos em estruturas. Nos anos vinte destaca-se o trabalho de Maier-Leibnitz [30,31] onde, pela primeira vez, foi tentada uma base quantitativa para a análise plástica. As obras de Bleich [32] e Maier-Leibnitz [33] trazem o resumo das contribuições da época.

Em 1940, nos EUA, van den Broek [34] publica seu livro, onde usa o termo "Limit Design" (Projeto no Estado Limite). A par

tir de 1938, Baker iniciou na Inglaterra uma série de estudos visando estabelecer, através do conceito de rótulas plásticas métodos simples de análise e projeto de estruturas. Estes resultados estão em sua obra "The Steel Skeleton"<sup>[4]</sup>, que apresenta um método para determinar a carga de colapso para pórticos múltiplos.

Os teoremas fundamentais da Análise Limite foram estabelecidos por Greenberg e Prager<sup>[35]</sup> e anteriormente, na Rússia, por Gvozdev<sup>[36]</sup>. Desde então, com base nestes princípios, desenvolveram-se diversos métodos de análise para estruturas reticulares. Entre eles, citam-se os métodos de Baker<sup>[37]</sup> para quadros planos, o de Neal e Symonds<sup>[38]</sup> ou método das desigualdades, o de Horne<sup>[39]</sup>, ou o método da distribuição de momentos plásticos e o dos mecanismos combinados de Neal e Symonds<sup>[40]</sup>.

Estes métodos estão descritos detalhadamente nos trabalhos de Neal<sup>[41]</sup>, Massonet-Save<sup>[2]</sup>, Hodge<sup>[20]</sup>, Horne<sup>[42]</sup> e Baker-Heyman<sup>[43]</sup>. Estes métodos colocaram a Análise Limite em fundamento quantitativo sólido, embora requeiram prática do analista na verificação final dos resultados pois não conduzem à solução final de uma forma sistemática.

Para esforços combinados de momentos e forças normais em estruturas, Baker<sup>[43]</sup> propôs um método iterativo em que primeiramente é feita a análise considerando apenas momentos. Após, então, são adicionados os esforços normais da estática e feitas as verificações sobre o mecanismo de colapso. Hodge<sup>[20]</sup> aperfeiçoou este método, que continua sendo trabalhoso e exige boa prática do analista. Para flexão e torção, Heyman<sup>[44]</sup>, usando um critério de es

escoamento normalizado, analisou estruturas de grelhas simples. Hodge<sup>[20]</sup>, usando critérios de escoamento linearizados por partes (LPP) suplantou as dificuldades da solução de Heyman que conduz a sistemas de equações não lineares. Entretanto, estes métodos tem poucas possibilidades de aplicação prática por serem trabalhosos e complicados. A obra de Hodge trata em detalhes a análise de estruturas sob esforços combinados.

Com o estabelecimento da analogia entre os problemas de Análise Limite de estruturas e a Programação Matemática, inicialmente por Charnes e Greenberg<sup>[45]</sup>, passou-se a contar com algoritmos matemáticos que possibilitaram a solução de problemas de forma sistemática e adequada a tratamento computacional. Com este estímulo, abriu-se uma nova era para a Plasticidade Estrutural. Charnes, Lemke e Zienkiewicz<sup>[46]</sup> estabeleceram os aspectos duais das formulações cinemática e estática. Ceradini<sup>[47]</sup> e Gavarini<sup>[48]</sup> deram interpretações físicas para as variáveis duais das formulações em termos de Programação Linear (PL). Gavarini<sup>[49]</sup>, estendeu estes conceitos para sistemas estruturais discretizados por diferenças finitas, modelados por Programação Não Linear (PNL). Grierson e Gladwell<sup>[50]</sup> colocaram o método dos mecanismos combinados em termos de PL, dualizado mais tarde por Cohn, Ghosh e Parimi<sup>[51]</sup>; este último obteve, ainda, uma interpretação para a versão estática. Fenves e Gonzalez Caro<sup>[52]</sup>, através dos conceitos da teoria dos grafos para a descrição dos sistemas estruturais rígido-plásticos e da dualidade, estabeleceram formulações para a Análise Limite e Projeto no Estado Limite, considerando resultantes de tensões simples e múltiplas, no último caso através da discretização da superfície de escoamento.

Maier<sup>[53]</sup>, estabeleceu, através da teoria de Karush-Kuhn-Tucker, formulações gerais para estruturas discretizadas. As relações de equilíbrio, compatibilidade e equações constitutivas são montadas como condições de Karush-Kuhn-Tucker. Após, são estabelecidos os programas equivalentes a estas restrições. Para uma única resultante de tensões tem-se problemas de PL e para resultantes de tensões múltiplas, PNL, que com a conveniente discretização do domínio de rigidez, transforma-se em PL.

Cyras<sup>[54]</sup> formulou o problema de outro modo: primeiramente estabelecendo as relações de equilíbrio, compatibilidade e relações constitutivas e impondo, em seguida, que a solução atendes-se a um princípio de extremo (Hill<sup>[12]</sup>), obtendo assim diretamente os programas estabelecidos por Maier. Grierson e Baset<sup>[27,55]</sup> desenvolveram soluções numéricas para a formulação proposta por Maier<sup>[53]</sup>, para diversos tipos de estruturas e seções planas. Estes modelos são gerais, valendo para qualquer estrutura que possa ser descrita através de um método conveniente de discretização.

Os conceitos de Análise Limite tem sido ultimamente estendidos a sistemas físicos onde, naturalmente, se pode estabelecer analogias de comportamento. Também é conhecida a descrição de seus conceitos em termos de Análise Funcional (Fremond<sup>[56]</sup>). Como exemplos de aplicações em sistemas físicos tem-se os trabalhos de Kritz<sup>[57]</sup> e Anthoine<sup>[58]</sup>, em Cadeias Ecológicas e Engenharia Elétrica, respectivamente. Para uma visão mais completa do panorama atual da Análise Elastoplástica, cabe reportarmos ao artigo de Maier e Munro<sup>[59]</sup>.



### 1.3. Objetivos e Justificativas

Neste trabalho, a Análise Limite é formulada através dos conceitos de Programação Matemática (PM). Como Programação Matemática entende-se a otimização de funções sujeitas a restrições na forma de equações e inequações. Os teoremas de Karush-Kuhn-Tucker especificam as condições de necessidade e suficiência para a existência de pontos de ótimo para um determinado problema de PM<sup>[60]</sup>. A analogia entre estes teoremas e a descrição dos modelos da Plasticidade estabelecem fortes ligações entre estas teorias<sup>[59]</sup>, e permitem tratamento elegante na formulação de problemas, no caso, da Análise Limite.

A partir da descrição das relações constitutivas rígido-plásticas e utilizando as condições de Karush-Kuhn-Tucker, ou de otimalidade, são estabelecidos os princípios de extremo da Plasticidade. Em um sistema estrutural, onde as equações de equilíbrio, compatibilidade e as relações constitutivas são descritas sob forma vetorial, ao se impor que a solução deste problema obedeça a um princípio de máximo, com restrições adicionais à convexidade das relações constitutivas, obtêm-se modelos matemáticos que são os enunciados em termos de PM dos teoremas clássicos da Análise Limite. Novamente, as condições de otimalidade são invocadas para o estabelecimento dos operadores que aparecem nos modelos. A Análise Limite é então formulada de uma forma geral, válida para qualquer sistema estrutural que possa receber descrição matricial adequada. Sendo as relações constitutivas, em geral, funções convexas não-lineares, a formulação é convertida em um problema de Programação não Linear (PNL).

Utilizando-se uma descrição nodal da estrutura<sup>[27]</sup>, evita-se o inconveniente da preparação manual dos dados correspondentes à descrição dos mecanismos básicos de colapso, ou a descrição estática da estrutura. Para estruturas compostas de elementos de barras, a formulação matricial permite a análise sistemática das diversas geometrias encontradas na prática, sejam quadros planos, grelhas e estruturas tridimensionais. Para a formulação mais geral, PNL, os algoritmos existentes limitam o porte dos problemas que podem ser resolvidos<sup>[5]</sup>; com a descrição linearizada por partes (LPP) das relações constitutivas, o problema é transformado num de Programação Linear (PL). A linearização introduz acréscimo sensível ao porte dos problemas, mas os algoritmos e programas computacionais atualmente disponíveis de PL<sup>[61,62]</sup>, permitem o eficiente tratamento de problemas de porte real<sup>[55]</sup>.

Utilizando-se a analogia entre a determinação da capacidade limite de uma seção plana e a de um sistema estrutural<sup>[5,27]</sup> pode-se, com o uso dos mesmos programas computacionais, tanto analisar a estrutura como um todo, ou uma seção transversal particular. Evidentemente, os resultados desta análise valem dentro dos limites estabelecidos pelas hipóteses adotadas (material rígido-plástico, pequenas deformações, ausência de instabilidade). Esta abordagem pode ser encarada como um caso particular de modelos mais gerais<sup>[63]</sup>, que incluem a resposta elástica do sistema.

#### 1.4. Organização do Trabalho

No capítulo segundo, a partir das relações constitutivas  $\bar{\epsilon}_i$

gido-plásticas são estabelecidos os princípios de extremo sob as quais as formulações estão apoiadas. Após, os modelos matemáticos gerais para a Análise Limite são deduzidos através de um procedimento puramente formal ao se aplicar os princípios de extremo a uma descrição discretizada genérica do sistema estrutural.

No capítulo terceiro, apresenta-se a descrição nodal para sistemas estruturais compostos de elementos prismáticos. Primeiramente são estabelecidas as relações constitutivas linearizadas para os elementos individuais, e após são estabelecidas as relações que descrevem a estrutura como um todo.

No capítulo quarto, a mesma formulação apresentada no capítulo terceiro é aplicada a seções transversais discretizadas por elementos de tensão constante, e com base nesta mesma formulação é apresentada uma forma de se gerar condições de escoamento linearizadas para seções transversais.

No capítulo quinto são apresentados resultados numéricos da aplicação dos modelos a estruturas planas e seções transversais.

## CAPÍTULO 2 - MODELAGEM MATEMÁTICA DA ANÁLISE LIMITE

### 2.1. Introdução

A motivação para o uso de Programação Matemática na formulação de problemas de Plasticidade tem dois aspectos importantes. O primeiro é a possibilidade de se obter um melhor entendimento dos problemas reais, através do estudo das formulações a estas associadas, e em segundo lugar, as técnicas formais de solução da Programação Matemática fornecem ferramental que possibilita solução computacional sistemática de problemas de porte real.

Neste capítulo, explora-se o primeiro dos aspectos anteriormente citados, e obtêm-se não apenas uma forma clara de entendimento dos diversos aspectos da Análise Limite, mas também uma forma elegante de apresentação. Nas primeiras seções (2.2. a 2.4) a Análise Limite é formulada a partir dos conceitos fundamentais da Plasticidade e da Mecânica das Estruturas. Nas seções seguintes, através do estudo das propriedades dos modelos formulados, abordam-se importantes aspectos das soluções, como sejam a influência das condições do escoamento associadas ao comportamento da estrutura e a unicidade do fator de carga (Sec. 2.5), assim como o caráter não unívoco dos vetores taxa de deformação e tensão generalizados para as formulações onde é utilizada a relação constitutiva LPP (Sec. 2.7). No desenvolvimento, uma barra sobreposta a um símbolo indica um vetor, e um til sobreposto indica transposição.

## 2.2. Hipóteses Principais e Notação

O modelo de material considerado é o rígido-perfeitamente plástico. Esta hipótese é uma primeira aproximação do comportamento real de um sistema estrutural no limite elástico. Esta consideração é feita, via de regra, quando a exaustão da capacidade de carga define o estado limite do sistema<sup>[54]</sup>. Embora pareça uma descrição crua, a Análise Limite tem mostrado, por comparações com resultados experimentais que corresponde ao conceito de um estado limite. Ela proporciona, por outro lado, uma economia real na determinação de dimensões de sistemas estruturais, quando comparada com os métodos de projeto elásticos<sup>[2]</sup>.

Os carregamentos são aplicados de forma estática ou quase-estática, de forma a não se precisar considerar efeitos dinâmicos nos modelos matemáticos.

As deformações no colapso são pequenas, ou seja, as relações de equilíbrio e compatibilidade podem ser estabelecidas a partir da configuração geométrica inicial da estrutura.

Na análise também não será considerada a possibilidade da ocorrência de flambagem ("buckling") localizada, e foram tomadas precauções de modo a se evitar a instabilidade da estrutura como um todo ("overall instability").

A estrutura é dividida em elementos genéricos de viga. O comportamento rígido plástico está localizado nos pontos extremos do elemento, ou pontos nodais. Assim, o sistema real é substituí

do por uma descrição discretizada. O problema, consiste em determinar as tensões generalizadas e as variáveis cinemáticas que descrevem o estado do modelo. Como tensões generalizadas<sup>[1]</sup> entendem-se as resultantes de tensão que estão sendo consideradas (ativas). No caso de vigas, estas são os momentos fletores e torções e a força normal.

Seja um ponto nodal de um elemento, e considere-se que seu nível de sollicitação seja definido por um vetor tensão generalizada n-dimensional,

$$\underline{\tilde{Q}}^i = [ Q_1^i, Q_2^i, \dots, Q_n^i ] \quad . \quad (2.1.)$$

A formulação dual do problema requer que a taxa de deformações no ponto seja também definida por um vetor n-dimensional,

$$\underline{\tilde{\dot{Q}}}^i = [ \dot{q}_1^i, \dot{q}_2^i, \dots, \dot{q}_n^i ] \quad . \quad (2.2.)$$

A taxa de dissipação de energia neste ponto será,

$$\dot{D}^i = \underline{\tilde{Q}}^i \cdot \underline{\tilde{\dot{Q}}}^i \quad (2.3.)$$

Considerando todos os pontos nodais da estrutura são construídos os supervetores

$$\underline{\tilde{Q}} = [ Q^1, Q^2, \dots, Q^n ]$$

(2.4.a,b)

$$\underline{\tilde{\dot{Q}}} = [ \dot{q}^1, \dot{q}^2, \dots, \dot{q}^n ] \quad ,$$

que descrevem de forma unívoca o estado da estrutura. A dissipação de energia em toda estrutura será;

$$\dot{D} = \underline{\tilde{Q}} \cdot \dot{\underline{q}} \quad . \quad (2.5.)$$

Um outro par de variáveis duais são os vetores esforços externos (carregamento) e taxas de deslocamento. Para um ponto no dal são representados por,

$$\underline{\tilde{F}}^i = [F_1^i, F_2^i, \dots, F_n^i] \quad , \quad (2.6.a, b)$$

$$\underline{\tilde{u}}^i = [ \dot{u}_1^i, \dot{u}_2^i, \dots, \dot{u}_n^i ] \quad ,$$

respectivamente. Da mesma forma que em 2.4., formam-se os super vetores F e u, e seu produto interno representa a potência realizada pelas forças externas,

$$\tilde{W} = \underline{\tilde{u}} \cdot \underline{F} \quad , \quad (2.7.)$$

sobre toda a estrutura.

### 2.3. Relações Principais e Princípios de Extremo

Serão estabelecidas as relações principais que entram na modelagem matemática da Análise Limite. Inicialmente, serão considerados os pares de vetores duais Q e q, F e u, como estabelecidos na seção 2.2.. Assim, as equações de equilíbrio para a estrutura

discretizada tomam a forma

$$\bar{C}\underline{Q} = \underline{F} . \quad (2.8.)$$

A matriz  $\bar{C}$  é um operador de equilíbrio para toda a estrutura. Neste trabalho, será obtida a partir das equações de equilíbrio para um elemento genérico de viga.

As equações geométricas que estabelecem a relação entre as taxas de deslocamento e de deformação, são obtidas por pura formalidade, uma vez que os operadores das equações de equilíbrio e compatibilidade são adjuntos<sup>[64,65]</sup>. Desta forma,

$$C \underline{\dot{u}} = \underline{\dot{q}} , \quad (2.9.)$$

onde  $C$  é o operador de compatibilidade, e  $\bar{C}$  seu transposto em 2.8, o de equilíbrio. As dimensões dos vetores  $\underline{\dot{u}}$  e  $\underline{F}$  fornecem o número de graus de liberdade de toda a estrutura. As relações 2.8 e 2.9 dependem somente da geometria da estrutura.

O comportamento do material rígido-plástico sob efeito de tensões combinadas é descrito por dois conjuntos de relações, a condição de escoamento e a regra de escoamento. Associando a cada ponto material um espaço tensão generalizada (fig. 2.1), neste espaço haverá um domínio, ou região onde o comportamento é rígido e as coordenadas de um ponto especificam o estado de tensão do ponto material. Esta região é limitada e convexa em torno da origem. Os pontos na fronteira do domínio definem as combinações específicas de estados de tensão generalizadas para as quais ocorre o es



coamento plástico. Pontos fora do domínio rígido ou da fronteira representam estados inacessíveis de tensão. Se representarmos a superfície limite de tensão por uma função vetorial das tensões generalizadas,

$$\underline{\phi} = \underline{\phi}(\underline{Q}), \quad (2.10)$$

então, a condição de escoamento pode ser escrita na forma

$$\underline{\phi}(\underline{Q}) \leq 0. \quad (2.11)$$

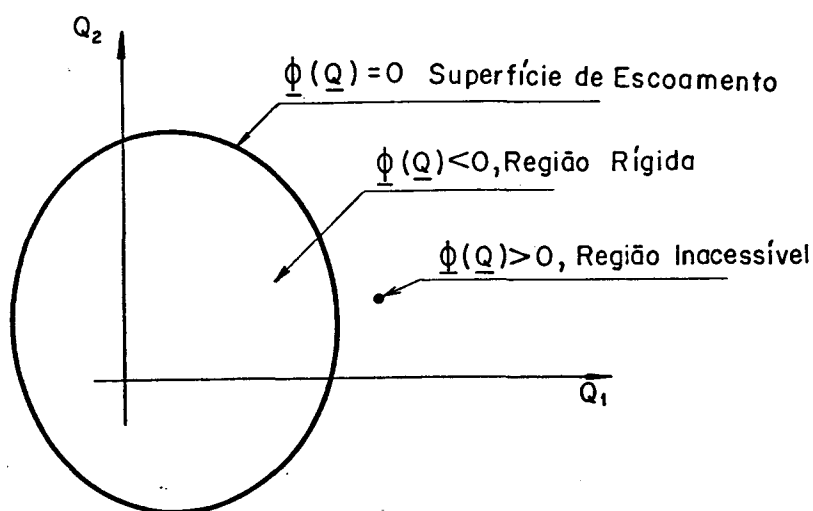


Fig. 2.1. Superfície de escoamento no espaço de tensões.

A regra da normalidade permite que as taxas de deformações no colapso sejam determinadas derivando-se a função de escoamento, ou seja,

$$\dot{\underline{q}} = \dot{\underline{\lambda}} \frac{\partial \underline{\phi}(\underline{Q})}{\partial \underline{Q}}, \quad \dot{\underline{\lambda}} > 0. \quad (2.12)$$

E a condição de consistência de Prager<sup>[1]</sup> determina que as com  
 ponentes do vetor  $\underline{\dot{q}}$  recebam contribuição apenas dos modos de es  
 coamento que estão ativos ( $\underline{\phi}^i = \underline{\theta}$ ) ou seja:

$$\underline{\dot{\phi}}(\underline{Q})\underline{\dot{\lambda}} = 0. \quad (2.13)$$

As relações 2.11, 2.12, 2.13, formam um conjunto de condi  
 ções de Karush-Kuhn-Tucker para o programa convexo abaixo:

$$\text{maximizar:} \quad \{\underline{\dot{q}} \underline{Q} / \underline{\phi}(\underline{Q}) \leq \underline{\theta}\}. \quad (2.14)$$

Por sua vez,  $\underline{\dot{q}} \underline{Q}$  representa a potência dissipada para um dado cam  
 po de taxas de deformação no colapso. A relação 2.14 pode ser  
 interpretada como o enunciado em termos de Programação Matemática  
 do princípio de máximo trabalho de Hill<sup>[12]</sup>.

Através da dualidade lagrangeana, será estabelecido o prin  
 cípio dual de 2.14. Primeiro constrói-se a função de Lagrange  
 para 2.14, que consiste da função objetivo do problema origi  
 nal, mais as restrições multiplicadas por multiplicadores adequada  
 dos. Se a restrição for em desigualdade, o multiplicador terá restri  
 ção de sinal, se for em igualdade, não terá restrição de si  
 nal. No caso, tem-se a restrição  $-\underline{\phi}(\underline{Q}) \geq \underline{\theta}$  e o multiplicador seri  
 rá um vetor  $\underline{\dot{\lambda}} > \underline{\theta}$ , assim,

$$\underline{f} = \underline{\dot{q}} \underline{Q} - \underline{\dot{\lambda}} [\underline{\phi}(\underline{Q})] \quad (2.15)$$

Diferenciando a função  $\underline{f}$  em relação às variáveis do proble  
 ma original, i.e.,  $\underline{Q}$  e igualando a zero, são obtidas as restri

ções do problema dual, ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial Q} = \underline{\dot{q}} - \underline{\tilde{\lambda}} \frac{\partial \phi(Q)}{\partial Q} = \underline{\theta} \quad (2.16)$$

Substituindo 2.16 na função objetivo e especificando a restrição de sinal, monta-se o dual:

$$\text{minimizar} \quad \{ \underline{\tilde{\lambda}} \frac{\partial \phi(Q)}{\partial Q} Q - \underline{\tilde{\lambda}} [\phi(Q)] \mid \underline{\tilde{\lambda}} \geq \underline{\theta} \}. \quad (2.17)$$

Como, para a solução, vale a equação 2.13, o segundo termo da função objetivo se anula, e o primeiro termo representa a energia dissipada correspondente a uma configuração de vetores taxa de deformação definidos por  $\underline{\tilde{\lambda}}$ . Está é a versão em termos de Programação Matemática do princípio de Markov<sup>[16]</sup>.

#### 2.4. Modelos Matemáticos para a Análise Limite

Para a Análise Limite supõe-se conhecidas a configuração geométrica, dimensões, capacidades de resistência e o vetor de esforços aplicados. Aplica-se um multiplicador " $\alpha$ " ao vetor de esforços aplicados e supõe-se que o mesmo cresça de forma monotônica até o esgotamento da capacidade de resistência da estrutura. O multiplicador  $\alpha$ , é designado como fator de carga, e o valor assumido ao colapso, carga limite. Ao ser atingida a carga limite, existe na estrutura um número tal de seções plastificadas, i.e., deformando-se continuamente sob carga constante, que a estrutura

deixa de funcionar como tal, tornando-se um mecanismo. Se, para o valor da carga limite, parte da estrutura não estiver em colapso, teremos então um mecanismo parcial de colapso.

Considerando as hipóteses enunciadas na seção 2.2., o colapso na estrutura deve-se unicamente ao escoamento plástico, e fala-se em colapso plástico simples. Estas mesmas hipóteses permitem obter o valor do fator de carga, taxas de deformação e deslocamento e as tensões generalizadas nos pontos nodais da estrutura. Estas grandezas são determinadas usando-se os princípios de extremo da Plasticidade, deduzidos na seção 2.3.: o princípio da máxima potência dos esforços externos, eq. 2.14., e o da mínima dissipação de energia interna, eq. 2.17.. Os modelos matemáticos de análise limite dão uma descrição matemática da aplicação destes princípios a sistemas estruturais discretizados.

Serão definidos, a seguir, alguns conceitos referentes aos vetores tensão generalizada, taxas de deslocamento e taxas de deformação.

Um vetor tensão generalizada Q que satisfaz às equações de equilíbrio, 2.8., é dito "estaticamente possível".

Um vetor Q, é dito um vetor de tensões generalizadas "admissível" se satisfaz à condição de escoamento 2.11.

O vetor Q, que satisfaz conjuntamente às condições de equilíbrio ("estaticamente possível") e de escoamento ("admissível"), é denominado de vetor tensão generalizada "estaticamente admissível".

vel", para o qual, então,

$$\tilde{C}Q = F,$$

$$\phi(Q) \leq \theta.$$

Um vetor taxa de deslocamento (deformação) é dito "cinemáticamente possível" se satisfaz às condições de compatibilidade, eq. 2.9.; e "admissível" se a potência nele realizada satisfaz a restrição.

$$\dot{W} = \tilde{U} F > 0. \quad (2.18)$$

O vetor taxas de deslocamento (deformação), que satisfaz em conjunto às eqs. 2.9., 2.18., chama-se "cinemáticamente admissível". Neste caso tem-se

$$C \dot{U} = q,$$

$$\tilde{U} F > 0.$$

Usando os conceitos definidos acima e o princípio da máxima potência das forças externas, que determina o estado de tensões generalizadas correspondentes à configuração de colapso, serão construídos os modelos matemáticos para a análise limite. Tomando este princípio como fundamental, será estabelecido o modelo estático; a seguir, será obtido o modelo dual, ou cinemático, utilizando a teoria da dualidade lagrangeana da programação matemática. Este modelo define as taxas de deformação (deslocamento) no

colapso.

#### 2.4.a. Formulação Estática

Por formulação estática entende-se um modelo matemático no qual as tensões generalizadas são as incôgnitas principais.

O vetor de tensões generalizadas correspondente ao colapso é determinado a partir do seguinte princípio de extremo:

*De todos os vetores tensão generalizada estáticamente admissíveis no colapso plástico, aquele que maximiza a potência das forças externas é a solução.*

Seja, então, um vetor de esforços externos que atua sobre uma estrutura discretizada, definido por

$$\alpha \underline{F}, \quad (2.19)$$

onde  $\alpha$  é o fator de carga desconhecido, e  $\underline{F} = F_i$  ( $i=1,2,\dots,m$ ) é um vetor dado que define a direção e distribuição das cargas. Desta forma, o valor da carga limite depende do parâmetro  $\alpha$ , e a potência realizada tem a forma:  $\dot{W} = \alpha \underline{\tilde{F}} \underline{\dot{u}}$ . (2.20)

Um vetor tensão generalizada estáticamente admissível é definido pelas relações 2.8. e 2.11. Como no colapso se tem o campo de tensões generalizadas estáticamente admissíveis que maximiza a potência dos esforços externos, a expressão matemática do prin

cípio 2.14. fica;

$$\begin{aligned}
 &\text{maximizar} && \alpha \tilde{F} \dot{\underline{u}} \\
 &\text{sujeito a} && \underline{\phi}(\underline{Q}) \leq \underline{\theta} && (2.21.a, b, c) \\
 &&& \text{e} && \tilde{C}\underline{Q} - \alpha \underline{F} = \underline{\theta}.
 \end{aligned}$$

Na função objetivo do programa estabelecido pelas relações 2.21.a,b,c, (expressão da potência das cargas), aparece o vetor  $\dot{\underline{u}}$  de taxas de deslocamento, que não faz parte das restrições 2.21.b,c. Como o produto  $\tilde{F} \dot{\underline{u}}$  é um escalar, pode-se tomá-lo de forma que  $\tilde{F} \dot{\underline{u}} = 1$ ; assim as relações 2.21.a,b,c tomam a forma:

$$\begin{aligned}
 &\text{maximizar} && \alpha \\
 &\text{sujeito a} && \underline{\phi}(\underline{Q}) \leq \underline{\theta} && (2.22.a, b, c) \\
 &&& \text{e} && \tilde{C}\underline{Q} - \alpha \underline{F} = \underline{\theta}
 \end{aligned}$$

As relações 2.22 representam a formulação estática da análise limite. É um problema convexo de programação matemática, uma vez que as restrições  $\underline{\phi}(\underline{Q}) \leq \underline{\theta}$  são convexas a partir da origem. Resolvendo este problema, é obtido o valor da carga limite e o vetor tensões generalizadas no colapso. Este problema corresponde ao seguinte enunciado:

*A uma distribuição de tensões generalizadas estáticamente admissível no colapso plástico, corresponde o máximo valor do*

fator de carga,

Este enunciado, que é consequência do princípio de extremo, é o enunciado do teorema estático da análise limite.

#### 2.4.b. Formulação Cinemática

A formulação cinemática da análise limite será obtida de maneira puramente formal, construindo-se o problema dual de 2.22. a,b,c.

Primeiramente, como para a eq. 2.15., constrói-se a função de Lagrange. Tem-se neste caso dois multiplicadores,  $\tilde{\lambda}$  e  $\tilde{u}$ , onde o primeiro tem a restrição  $\dot{\tilde{\lambda}} \geq 0$  e o segundo, sem restrição de sinal:

$$\mathcal{L} = \alpha - \dot{\tilde{\lambda}} \phi(Q) + \tilde{u} (CQ - \alpha F). \quad (2,23)$$

Diferenciando 2.23 em relação às variáveis do problema original,  $\alpha$  e  $Q$  vem:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} = -\dot{\tilde{\lambda}} \frac{\partial \phi(Q)}{\partial Q} + C\tilde{u} = 0, \quad (2.24.a,b.)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} = 1 - \tilde{u}F = 0.$$

As relações 2.24.a,b são as restrições do problema dual,



que substituídas em 2.23 e usando 2.9 e 2.12 fornecem;

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} && \dot{\tilde{\lambda}} \frac{\partial \phi(Q)}{\partial Q} Q - \tilde{\lambda} \phi, \\
 &\text{sujeito a} && C\dot{\underline{u}} - \frac{\partial \phi(Q)}{\partial (Q)} \dot{\lambda} = \underline{\theta}, && (2.25.a,b,c,d) \\
 &&& \tilde{F}\dot{\underline{u}} = 1 \\
 &&& \text{e} && \dot{\lambda} \geq \underline{\theta}.
 \end{aligned}$$

As relações acima constituem o modelo matemático da formulação cinemática.

A equação 2.25.b descreve um campo de deslocamentos cinematicamente possível, pois por 2.12 tem-se

$$\dot{\underline{q}} = \tilde{\lambda} \frac{\partial \phi(Q)}{\partial Q}.$$

A terceira equação, 2.25.c representa um campo de deslocamentos admissível. Em consequência, estas duas restrições em conjunto descrevem um campo de deslocamentos cinematicamente admissível.

O primeiro termo da função objetivo representa a taxa de dissipação de energia, uma vez que  $\dot{D} = \dot{\underline{q}} Q$ . No segundo termo, a condição de consistência para a solução, 2.13, o faz anular-se. Desta forma, o problema descrito por 2.25.a,b,c,d corresponde ao seguinte enunciado:

*De todos os vetores cinematicamente admissíveis, de taxas de deslocamentos no colapso plástico, aquele que minimiza a taxa de dissipação de energia corresponde à solução.*

## 2.5. Relações de Dualidade

Aplicando-se o segundo teorema da dualidade aos problemas 2.22 e 2.25, as soluções  $\underline{\lambda}$  e  $\underline{Q}$  satisfazem a condição

$$\underline{\tilde{\lambda}} \underline{\phi}(\underline{Q}) = 0, \quad (2.26)$$

que é equivalente às regras de escoamento associadas:

$$\underline{\dot{\lambda}}^i > \theta \quad \text{se} \quad \underline{\phi}^i(\underline{Q}) = \underline{\theta},$$

$$\underline{\dot{\lambda}}^i = \theta \quad \text{se} \quad \underline{\phi}^i(\underline{Q}) < \underline{\theta}$$

Fisicamente, isto significa que nos locais onde ocorre o escoamento a capacidade de resistência esgotou-se, ou seja, o vetor tensões generalizadas atingiu um ponto no contorno do domínio de rigidez correspondente ao elemento  $i$ . Por outro lado, para pontos no interior do domínio, corresponde um vetor taxa de deformação zero, isto é,  $\underline{\dot{\lambda}}^i = \underline{\theta}$ .

Novamente aplicando o segundo teorema às relações de equilíbrio, chega-se à relação  $\underline{\tilde{u}} [\underline{\tilde{C}} \underline{Q} - \underline{\alpha} \underline{F}] = \theta$ . Como  $\underline{C} \underline{\dot{u}} = \underline{\dot{q}}$  vem:

$$\underline{\tilde{q}} \underline{Q} = \underline{\alpha} \underline{\tilde{u}} \underline{F}. \quad (2.27)$$

A equação 2.27 significa que na solução, a taxa de dissipação de energia é igual à potência dos esforços externos. Isto confirma o caráter dual dos princípios de extremo, de acordo com os quais, na solução, a máxima potência das forças externas é igual à mínima dissipação de energia.

Pelo primeiro teorema da dualidade, as duas funções objetivo de 2.22 e 2.25 tem o mesmo valor. Então,

$$\alpha = \tilde{\lambda} \frac{\partial \phi(Q)}{\partial Q} Q \quad (2.28)$$

que pode ser interpretada como a igualdade entre a potência das forças externas e a taxa de dissipação de energia, uma vez que  $\tilde{u} F = 1$ . Adotando-se qualquer outro valor para o produto  $\tilde{u} F$  a relação 2.28 se mantém.

## 2.6. Relações Constitutivas Linearizadas Por Partes (LPP)

Nas seções anteriores, as relações constitutivas foram consideradas em sua forma mais geral, o que corresponde ao domínio de rigidez ser limitado por uma função ou conjunto de funções convexas não-lineares, como por exemplo as condições de von Mises. Isto torna os modelos anteriormente deduzidos em problemas de programação não-linear. Para estes problemas a atual capacidade dos computadores e os algoritmos disponíveis restringem a solução a problemas de pequeno porte <sup>[5]</sup>. Uma saída para estas limitações consiste na linearização dos critérios de escoamento ou a utilização

do critério de Tresca, tornando os modelos 2.22 e 2.25 em problemas de programação linear, uma vez que os programas disponíveis de PL permitem a solução de problemas de porte avantajado.

A linearização de um critério do escoamento qualquer pode ser feita com a seguinte representação matemática:

$$N^i \underline{Q}^i \leq \underline{R}^i, \quad (2.29)$$

onde  $N$  é a matriz das normais unitárias das superfícies correspondentes à linearização efetuada, e  $\underline{R}^i$  representa a distância da origem até a superfície do critério de escoamento linearizado. Com esta descrição do critério de escoamento pode-se obter boas aproximações do comportamento dos elementos estruturais, superando-se as limitações impostas pelas não-linearidades.

Desta forma, os problemas 2.22 e 2.25 ficam com as seguintes representações:

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} && \alpha \\ &\text{sujeito a} && \tilde{N} \underline{Q} \leq \underline{R} \\ & && (2.30.a, b, c) \\ &\text{e} && \tilde{C} \underline{Q} - \alpha \underline{F} = \underline{\theta}; \\ &\text{minimizar} && \tilde{\lambda} \underline{R}, \\ &\text{sujeito a} && \underline{C} \underline{u} - \underline{N} \underline{\lambda} = \underline{\theta}, \end{aligned}$$

$$\tilde{\underline{F}} \dot{\underline{u}} = 1 \quad (2.31.a,b,c,d)$$

$$e \quad \dot{\underline{\lambda}} \geq \underline{0}$$

Os conjuntos de relações (2.30) e (2.31) formam problemas de PL que podem ser resolvidos pelos métodos usuais. No próximo capítulo apresenta-se em detalhes o desenvolvimento da relação 2.29.

## 2.7. Alguns Aspectos Qualitativos

Na formulação estática determina-se a distribuição estática mente admissível de esforços internos que maximiza o valor do parâmetro de carga  $\alpha$ . Como consequência, o parâmetro de carga correspondente a qualquer campo estáticamente admissível de tensões será menor ou igual ao valor da carga limite, o que é em essência o enunciado do teorema estático.

O valor da carga limite também é obtido pela equação 2.29, que é consequência da solução da formulação cinemática, onde as incôgnitas principais são os vetores  $\dot{\underline{u}}$  e  $\dot{\underline{\lambda}}$ . Nesta formulação, a mínima taxa de dissipação de energia é determinada para um valor normalizado das taxas de deslocamento. Daí segue que o parâmetro de carga associado a qualquer vetor cinematicamente admissível de taxas de deslocamentos, será sempre maior ou igual ao valor da carga limite. Esta propriedade do modelo é análoga ao teorema cinemático.

Supondo que o estado de tensões de uma estrutura seja ca

racterizado pelo vetor,

$$\underline{\tilde{Q}} = [Q_1, Q_2],$$

então pode-se representar o problema 2.22 em um espaço tridimensional com coordenadas  $Q_1, Q_2, \alpha$ .

Um campo de tensões admissível pode ser representado por um cilindro cuja base é a curva  $\phi(\underline{Q}) \leq \theta$ . As equações de equilíbrio  $\underline{\tilde{CQ}} - \alpha \underline{F} = \underline{\theta}$  descrevem um plano que passa pela origem. Todos os vetores assentes neste plano que ou estejam no interior do cilindro, ou toquem o contorno do mesmo, satisfazem às condições para um campo estáticamente admissível, fig. 2.2.. O maior valor de " $\alpha$ " será a ordenada mais alta da interseção do plano com o cilindro.

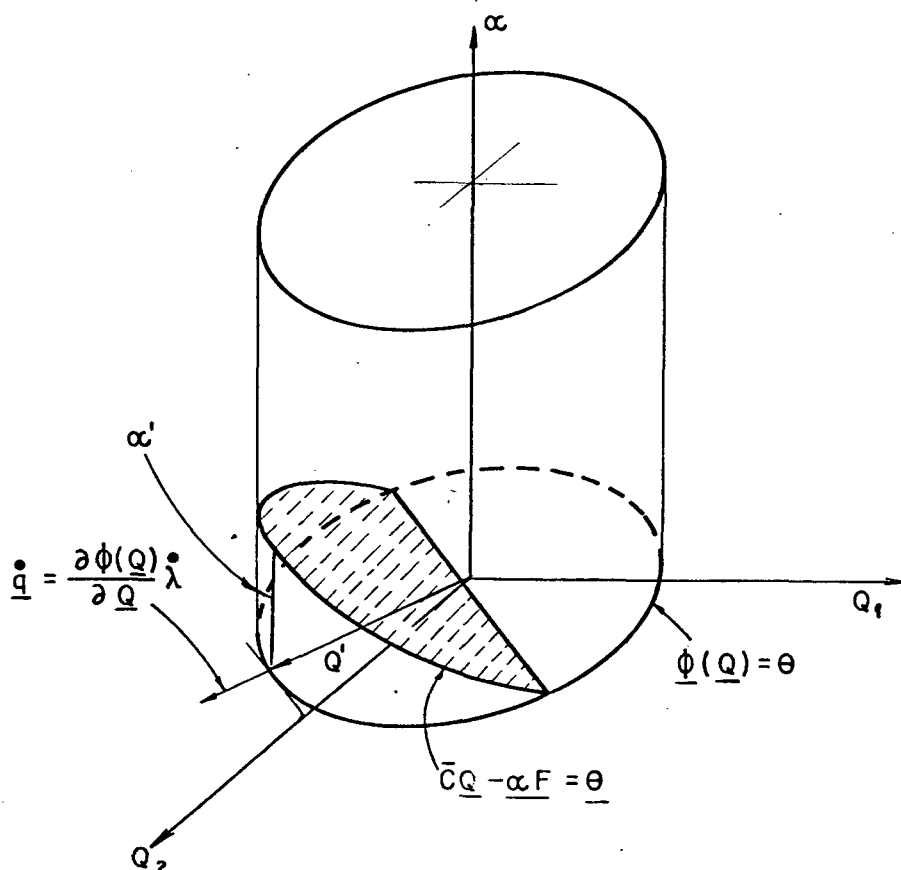


Fig. 2.2. Solução no espaço tensão para critério de Mises.

As coordenadas do vetor corresponderão às componentes das tensões para o colapso. Se a função de escoamento é lisa então a " $\alpha$ " corresponde uma única coordenada  $\underline{Q}'$ , i.e., um único gradiente da função de escoamento que corresponde a um valor único da taxa de deformação.

Para uma função de escoamento LPP, o campo de tensões admissíveis é descrito por um prisma cujas arestas são paralelas à coordenada " $\alpha$ ", podendo existir dois tipos de soluções. O primeiro ocorre quando o ponto mais alto da interseção plano-prisma estiver em uma aresta do prisma fig. 2.3. Neste caso, ter-se-á um único vetor  $\underline{Q}$  e o vetor  $\dot{\underline{q}}$ , assumirá qualquer valor que seja uma combinação linear dos vetores  $\dot{\underline{q}}$  dos lados adjacentes. Entretanto, a taxa de dissipação tem valor único e igual ao valor do parâmetro de carga limite.

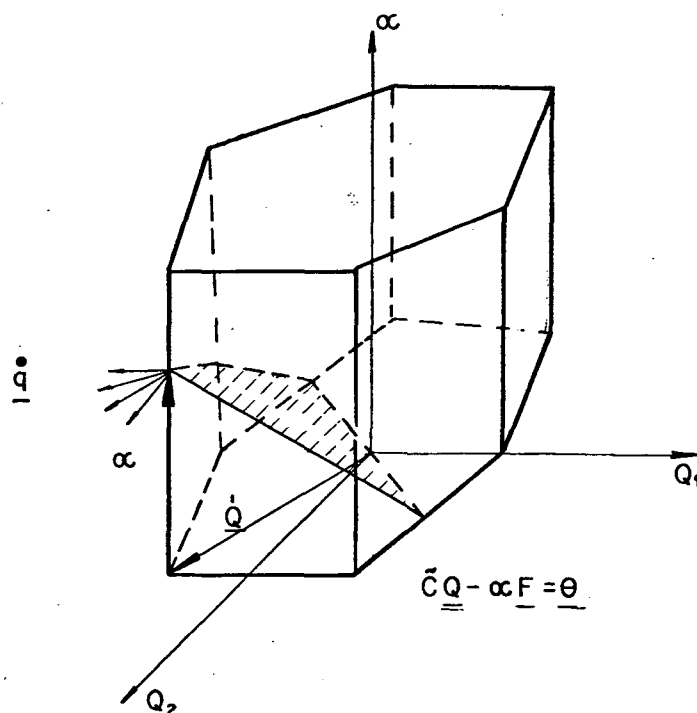


Fig. 2.3. Solução não unívoca para taxas de deformação

O segundo tipo acontece quando a interseção plano-prisma em seu ponto mais alto, " $\alpha$ ", tiver altura constante ao longo de uma face, fig. 2.4. A este caso, corresponderá um único valor de ta xas de deformação e a diversos possíveis vetores tensão. Ou seja, ter-se-á um único mecanismo de colapso e um conjunto linearmente dependente de vetores tensão. Estas propriedades permitem con cluir que, embora em alguns casos se possa ter campos de deforma<sub>ç</sub>ão ou campos de tensão não únicos, o valor da carga limite será sempre o mesmo. Este ponto é discutido em detalhes por Franchi e Cohn<sup>[66]</sup>.

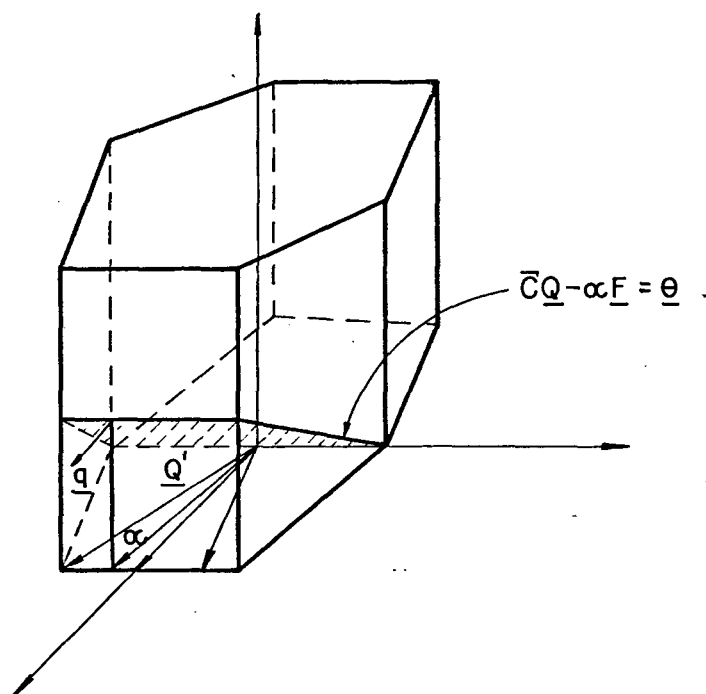


Fig. 2.4. Solução não unívoca para tensões generalizadas.



## CAPITULO 3 - ANÁLISE LIMITE DE ESTRUTURAS RETICULARES

### 3.1 - Introdução

A aplicação dos modelos desenvolvidos no capítulo anterior a sistemas reticulares requer que sejam satisfeitas as condições para a existência de pontos extremos, ou de Karush-Kuhn-Tucker. Fisicamente, estas representam o comportamento de elementos individuais e da estrutura como um todo. As relações constitutivas para um elemento genérico são estabelecidas em termos das resultantes de tensões e taxas de deformação localizadas nos pontos extremos (nodais) dos elementos. Para a estrutura montada, teremos as restrições de equilíbrio, compatibilidade e a expressão da taxa de trabalho positiva para as deformações plásticas. Estas são formuladas em formato matricial e permitem que esta abordagem seja aplicada a qualquer sistema estrutural em que se possa usar a análise elástica linear convencional<sup>[27]</sup>. Primeiramente serão desenvolvidas as relações que descrevem um elemento individual, sec. 3.2., e após para a estrutura montada, Sec. 3.3., seguindo os seguintes passos:

#### 1. Para cada Elemento Individual:

a) Relacionam-se as resultantes de tensões ativas dos pontos nodais, às ditas resultantes de tensões naturais que autoequilibram o elemento.

b) Relacionam-se as taxas de deformação ativas às taxas de deformação naturais que excluem os movimentos de corpo rígido do elemento.

c) Formula-se a relação constitutiva rígido-plástica em termos de resultantes de tensões naturais e das correspondentes taxas de deformação naturais.

## 2. Para a estrutura;

a) Definir a condição de taxa de trabalho positiva que relaciona as taxas de deslocamento às cargas aplicadas.

b) Formular as condições de compatibilidade que relacionam as taxas de deslocamento (velocidade) às taxas de deformação naturais.

c) Formular as condições de equilíbrio, que relacionam as cargas aplicadas às resultantes de tensões naturais.

As relações desenvolvidas nos passos 1 e 2 formarão as condições de Karush-Kuhn-Tucker para os conjuntos de equações 2.30.a, b,c; e 2.31.a,b,c,d<sup>[5,27]</sup>.

## 3.2. Elemento Genérico da Estrutura

Considera-se um elemento prismático, genérico onde o comportamento rígido plástico se concentra em suas extremidades, identificadas pelas letras j e k. Os esforços internos na seção j, fig. 3.1. são as resultantes das tensões que atuam em todos os pontos da mesma. O vetor de resultantes de tensão é, então, expresso por

$$R^j_i = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ P_z \\ M_x \\ M_y \\ T_z \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

onde  $V_x$ ,  $V_y$ , denotam as componentes de cisalhamento,  $P_z$  a força normal,  $M_x$  e  $M_y$  os momentos fletores e  $T_z$  o momento torçor.

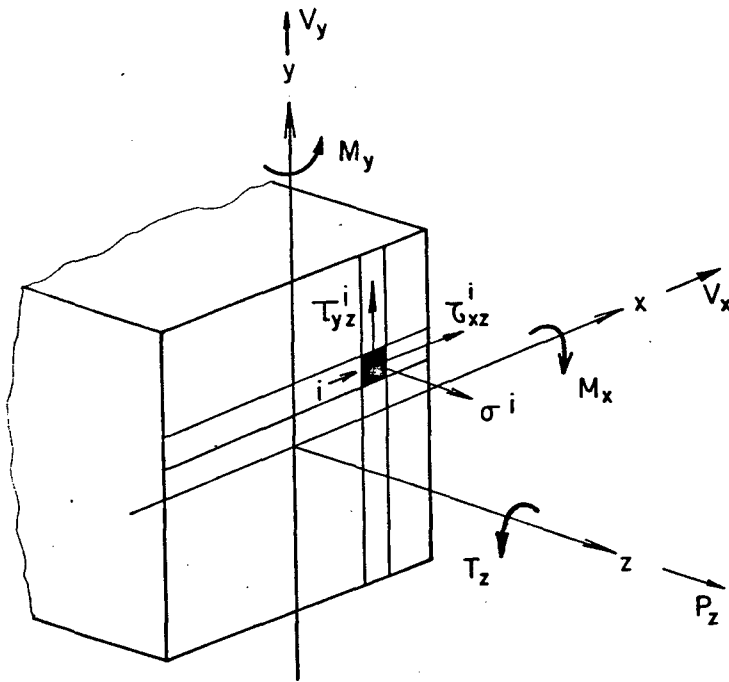


Fig. 3.1. Tensões ativas e resultantes de tensão.

O vetor taxa de deformação correspondente  $\bar{\epsilon}$  é formado considerando

que o produto interno entre  $\underline{R}^j$  e

$$\underline{\dot{r}}^j = \begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{\Delta z} \\ \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \\ \dot{\psi}_z \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

seja, a menos de uma constante, a taxa de dissipação de energia na seção:

$$\dot{D}^j = \underline{\tilde{R}}^j \underline{\dot{r}}^j \quad (3.3)$$

Os vetores  $\underline{R}^j$ ,  $\underline{R}^k$  não representam estados autoequilibrados de resultantes de tensões, assim também  $\underline{\dot{r}}^j$  e  $\underline{\dot{r}}^k$  podem representar movimentos de corpo rígido<sup>[6,7]</sup>. Algumas resultantes,  $(V_x, V_y)$  também não estarão ativas, i.e., seu valor não influencia os resultados de forma significativa. A seguir, são estabelecidas as relações entre as resultantes de tensão naturais, não naturais e ativas, e entre as taxas de deformação naturais, não naturais e ativas.

### 3.2.a. Relações entre Resultantes de Tensões.

Seja a fig. 3.2.a,b,c, onde em (a) são mostradas as resultantes de tensão (taxas de deformação) não naturais, em (b) as resultantes de tensão naturais (taxas de deformação) e em (c), as tensões generalizadas ativas,  $\underline{s}^j$  e  $\underline{s}^k$ .

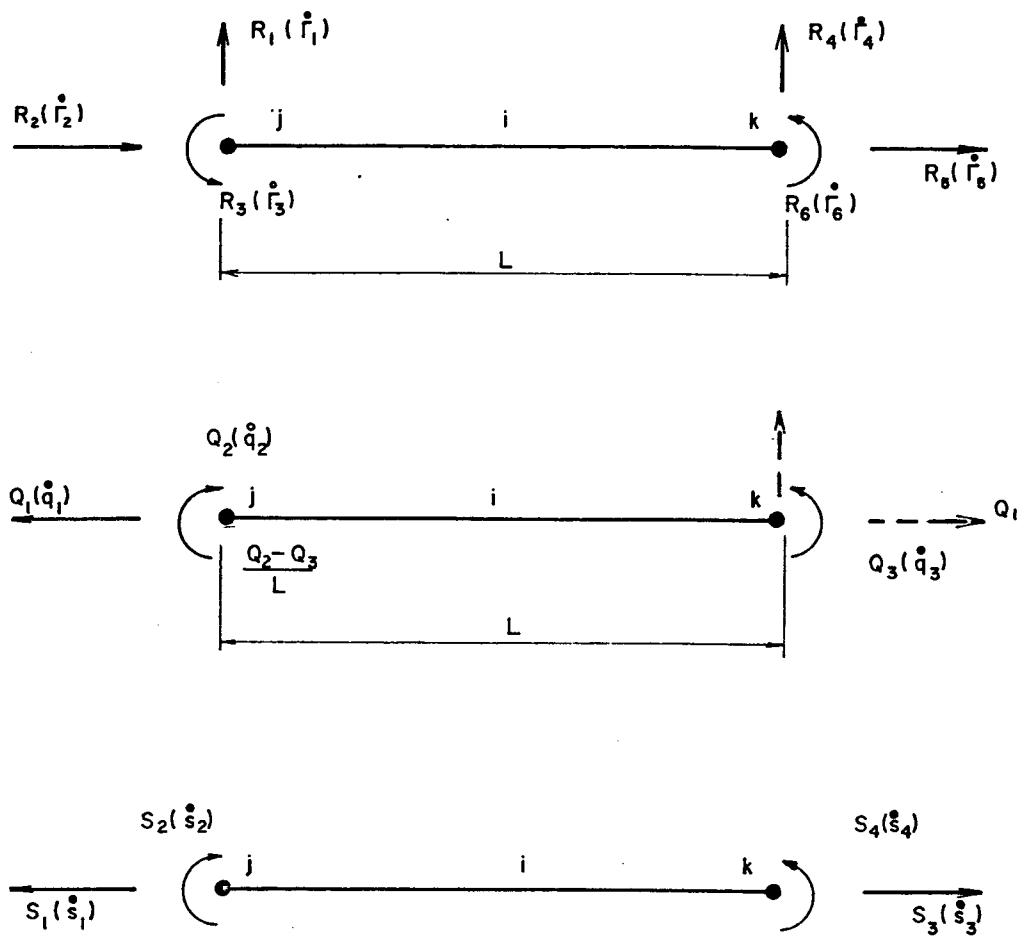


Fig. 3.2. Elemento genérico de viga. a) Resultantes de tensão não-naturais. b) Resultantes de tensão naturais. c) Resultantes de tensão ativas.

Adotando-se o sentido j-k como positivo e posicionando os eixos  $x, y, z$  segundo a fig. 3.1 tem-se para o vetor  $\underline{R}^i$ :

$$\underline{R}^i = \begin{bmatrix} R^j \\ R^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_x \\ P_z \\ M_y \\ V_x \\ P_z \\ M_y \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Para um elemento de viga plano, tem-se três resultantes de tensão naturais, fig. 3.2.b, que se pode escolher à vontade, de forma a estarem autoequilibradas. Relacionando-se o vetor  $\underline{Q}^i$  à  $\underline{R}^i$  obtêm-se a equação:

$$\underline{R}^i = \begin{bmatrix} B^j & | & \theta \\ \hline \theta & | & B^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^j \\ Q^k \end{bmatrix} = B^i \underline{Q}^i \quad (3.5)$$

onde  $B^j$  é a matriz de transformação

$$B^j = \begin{bmatrix} 0 & -1/L & 1/L \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1/L & -1/L \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Para estruturas planas comuns, as tensões cisalhantes não apresentam influência sensível na carga de colapso, podendo-se portanto considerar apenas o esforço normal e o momento fletor como resultantes de tensão ativas. Usando a convenção da fig. 3.2.c, relaciona-se o vetor  $\underline{S}^i$  das resultantes de tensão ativas ao vetor das resultantes de tensão não naturais, através da relação,

$$\underline{S}^i = \begin{bmatrix} S^j \\ \hline S^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^j & | & \theta \\ \hline \theta & | & X^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^j & | & \theta \\ \hline \theta & | & A^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^j \\ R^k \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

ou de forma compactada,

$$\underline{S}^i = X^i A^i \underline{R}^i . \quad (3.7)$$

As matrizes  $A^j, A^k$  em 3.6., identificam as resultantes de tensão ativas; e  $X_j, X_k$  são matrizes que normalizam as resultantes de tensão ativas em termos das capacidades plásticas principais, sendo dadas por:

$$A_j = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, A_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$X_j = \begin{bmatrix} 1/P_p & 0 \\ 0 & 1/M_p \end{bmatrix}, X_k = \begin{bmatrix} 1/P_p & 0 \\ 0 & 1/M_p \end{bmatrix}$$

Substituindo 3.5 em 3.6 relacionam-se as resultantes de tensão naturais às ativas, obtendo-se

$$\underline{S}^i = X^i A^i B^i \underline{Q}^i \quad (3.8)$$

ou no caso:

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1/P_p \\ Q_2/M_p \\ Q_1/P_p \\ Q_2/M_p \end{bmatrix}$$

### 3.2.b. Relações entre Taxas de Deformação

Os vetores taxa de deformação correspondentes aos vários tipos de resultantes de tensão são tomados de forma que:

$$\dot{\underline{D}} = \tilde{\underline{R}}^i \dot{\underline{r}}^i = \tilde{\underline{Q}}^i \dot{\underline{q}}^i = \tilde{\underline{S}}^i \dot{\underline{s}}^i . \quad (3.9)$$

Das figuras 3.2.a,b,c tem-se os vetores,

$$\dot{\underline{r}}^i = \begin{bmatrix} \dot{r}_1 \\ \dot{r}_2 \\ \dot{r}_3 \\ \dot{r}_4 \\ \dot{r}_5 \\ \dot{r}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{v}_x^j \\ \dot{\Delta}_z^j \\ \dot{\theta}_y^j \\ \dot{v}_x^k \\ \dot{\Delta}_z^k \\ \dot{\theta}_z^k \end{bmatrix} , \quad \dot{\underline{q}}^i = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} , \quad \dot{\underline{s}}^i = \begin{bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \dot{s}_3 \\ \dot{s}_4 \end{bmatrix}^i ,$$

onde  $\dot{\underline{s}}^i$  e  $\dot{\underline{q}}^i$  se referem, respectivamente às taxas de deformação ativas e taxas de deformação naturais.

Aplicando-se o princípio da contragradência em 3.5 obtém-se a relação entre as taxas de deformação naturais e não-naturais,

$$\dot{\underline{q}}^i = \tilde{\underline{B}}^i \dot{\underline{r}}^i , \quad (3.10)$$

que também podem ser estabelecidas a partir de considerações cinemáticas<sup>[67]</sup>.



Da mesma forma, para a eq. 3.6., vem

$$\underline{\dot{r}}^i = \tilde{X}^i \tilde{A}^i \underline{\dot{s}}^i \quad (3.11)$$

que substituída em 3.10 estabelece as relações entre as resultantes de tensões ativas e naturais:

$$\underline{\dot{q}}^i = \tilde{B}^i \tilde{X}^i \tilde{A}^i \underline{\dot{s}}^i. \quad (3.12)$$

Esta transformação, em essência remove os movimentos de corpo  $\underline{\dot{r}}^i$  rígido do elemento, ficando para o elemento considerado:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\dot{s}_1 + \dot{s}_2)/P_p \\ \dot{s}_2/M_p \\ \dot{s}_4/M_p \end{bmatrix}$$

### 3.2.c. Relações Constitutivas LPP

As relações constitutivas para um elemento rígido-plástico, são definidas a partir da condição de escoamento. Esta especifica a combinação de resultantes de tensões ativas necessárias ao início do escoamento plástico.

De uma forma geral, pode ser definida por uma função

$$\phi(\underline{S}) \leq 0, \quad (3.13)$$

onde  $\phi$  é o potencial plástico associado à superfície de escoamento. Como, por hipótese o comportamento rígido dos elementos está concentrado em seus pontos nodais, a condição de escoamento do elemento é estabelecida a partir das condições de escoamento particulares das seções  $j$  e  $k$  do elemento. Estas dependem basicamente da configuração geométrica da seção considerada.

Para o caso, considere-se uma seção retangular com condição de escoamento já conhecida [1, 27]. Esta é dada pelas funções

$$\phi_1 = S_1^2 + S_2 - 1, \quad \phi_2 = S_1^2 - S_2 - 1,$$

(fig. 3.3). Estas funções são não lineares, e levam a dificuldade

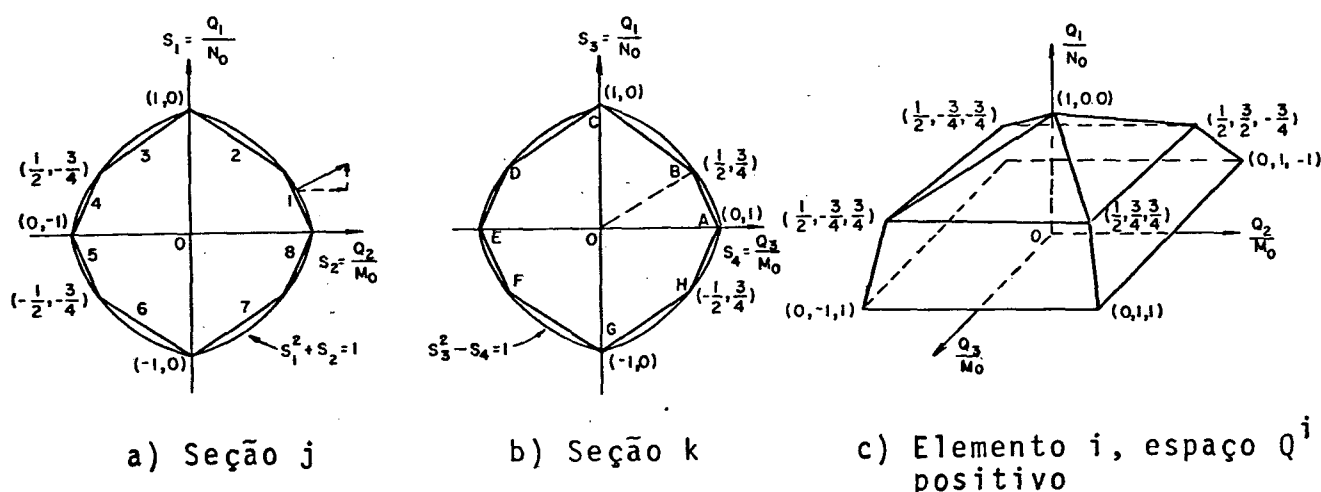


Fig. 3.3. Superfícies de escoamento LPP para elementos planos de seção transversal quadrada sob tensões combinadas (M+P).

des discutidas na seção 2.5., para as quais uma saída é sua linearização por partes. Selecionando-se pontos na curva ou superfície de escoamento e unindo-os por segmentos de reta, obtêm-se a condição de escoamento LPP, fig. 3.3. Para as duas seções consideradas no elemento, a descrição LPP terá a forma

$$\phi^j = \bar{n}^j \underline{S}^j - \underline{R}^j \quad \phi^k = \bar{n}^k \underline{S}^k - \underline{R}^k, \quad (3.14)$$

onde  $\underline{\phi}$  é o vetor potencial plástico associado aos modos de escoamento (hiperplanos, planos, linhas) que definem a superfície de escoamento LPP,  $\underline{R}$  é o vetor das distâncias ortogonais da origem do espaço das tensões generalizadas até os modos de escoamento (capacidades plásticas generalizadas), e  $\bar{n}$  é a matriz das normais unitárias à superfície de escoamento. Para o exemplo fig. 3.3. tem-se:

$$\underline{\bar{R}}^j = \underline{\bar{R}}^k = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

e

$$n_j = n_k = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{-3}{\sqrt{13}} & \frac{-3}{\sqrt{13}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{-2}{\sqrt{13}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

Com isto, pode-se expressar as relações constitutivas LPP a partir das resultantes de tensão naturais. Usando a equação

3.8. em 3.14, tem-se

$$\begin{bmatrix} \phi^j \\ \vdots \\ \phi^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{n}^j & \phi \\ \vdots & \vdots \\ \phi & \tilde{n}^k \end{bmatrix} X^i A^i B^i Q^i - \begin{bmatrix} R^j \\ \vdots \\ R^k \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

ou, em forma compacta:

$$\phi^i = \tilde{n}^i X^i A^i B^i Q^i - R^i.$$

Fazendo

$$N^i = \tilde{B}^i \tilde{A}^i \tilde{X}^i n^i, \quad (3.16)$$

e retirando  $\phi^i$ , tem-se, ainda,

$$\tilde{N}^i Q^i \leq R^i, \quad (3.17)$$

que é a expressão da condição de escoamento LPP em termos das resultantes de tensão naturais.

Para qualquer estado de tensões generalizadas em que se tem um ponto de escoamento, ou um ponto na superfície de escoamento, as taxas de deformação plástica serão proporcionais à normal unitária à superfície no ponto (Regra de escoamento associada<sup>[1]</sup>). Assim, para  $\phi = 0$  em 3.15. tem-se

$$\dot{\underline{s}} = \frac{\partial \phi}{\partial \underline{s}} \dot{\underline{\lambda}} = \underline{n} \dot{\underline{\lambda}}, \quad (3.18)$$

onde  $\dot{\lambda}$  representa a taxa de variação dos multiplicadores plásticos. Para  $\dot{\lambda} = 0$  tem-se o comportamento rígido do elemento. Por exemplo, as relações  $\dot{s}^j = n^j \dot{\lambda}^j$  e  $\dot{s}^k = n^k \dot{\lambda}^k$  definem a regra de escoamento para as superfícies das figuras 3.3.a, 3.3.b, respectivamente, e para o modo de escoamento 1, na figura 3.3.a., tem-se:

$$\dot{s}^j = \begin{bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Substituindo a expressão para  $\dot{s}$  de 3.18. em 3.12. é obtida a regra de escoamento em termos de taxas de deformação naturais, então,

$$\dot{q}^i = \tilde{B}^i \tilde{A}^i \tilde{X}^i \begin{bmatrix} \dot{s}_j \\ \dot{s}_k \end{bmatrix} = \tilde{B}^i \tilde{A}^i \tilde{X}^i \begin{bmatrix} n_j & \theta \\ \theta & n_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\lambda}^j \\ \dot{\lambda}^k \end{bmatrix}$$

ou,

$$\dot{q}^i = N^i \dot{\lambda}^i, \quad (3.19)$$

para  $\tilde{B}^i \tilde{A}^i \tilde{X}^i n^i = N^i$ .

As relações constitutivas LPP, devem ainda atender a duas importantes restrições quais sejam: a condição de dissipação de energia para a ocorrência de escoamento plástico e a condição de consistência ou ortogonalidade de Prager:

$$\dot{\underline{\lambda}} > \underline{\theta} ,$$

(3.20.a,b)

$$\dot{\underline{\phi}}^i \dot{\underline{\lambda}}^i = 0$$

Estendendo as equações 3.17, 3.19 e 3.20.a,b a todos os  $m$  elementos da estrutura são obtidas as relações constitutivas LPP para a estrutura desmontada:

$$\ddot{\underline{N}} \underline{Q} \leq \underline{R}$$

$$\dot{\underline{q}} = \underline{N} \dot{\underline{\lambda}}$$

(3.21.a,b,c,d)

$$\dot{\underline{\lambda}} > \underline{\theta}$$

$$\ddot{\underline{\phi}} \dot{\underline{\lambda}} = 0$$

onde,  $\underline{N}$  é uma matriz bloco-diagonal formada a partir das  $\underline{N}^i$ , e  $\underline{\phi}$ ,  $\underline{Q}$ ,  $\underline{R}$ ,  $\dot{\underline{q}}$  e  $\dot{\underline{\lambda}}$  são supervetores correspondentes ao "empilhamento" dos  $m$  elementos individuais. Note-se que esta descrição é matematicamente similar à descrição do comportamento de um elemento infinitesimal de contínuo, ou de uma seção transversal, como será visto mais adiante.

### 3.3. Montagem da Estrutura

No desenvolvimento, considera-se um pórtico plano simples, composto de quatro elementos planos conforme fig. 3.4., sendo então desenvolvidas integralmente as relações que descrevem a estrutura montada.

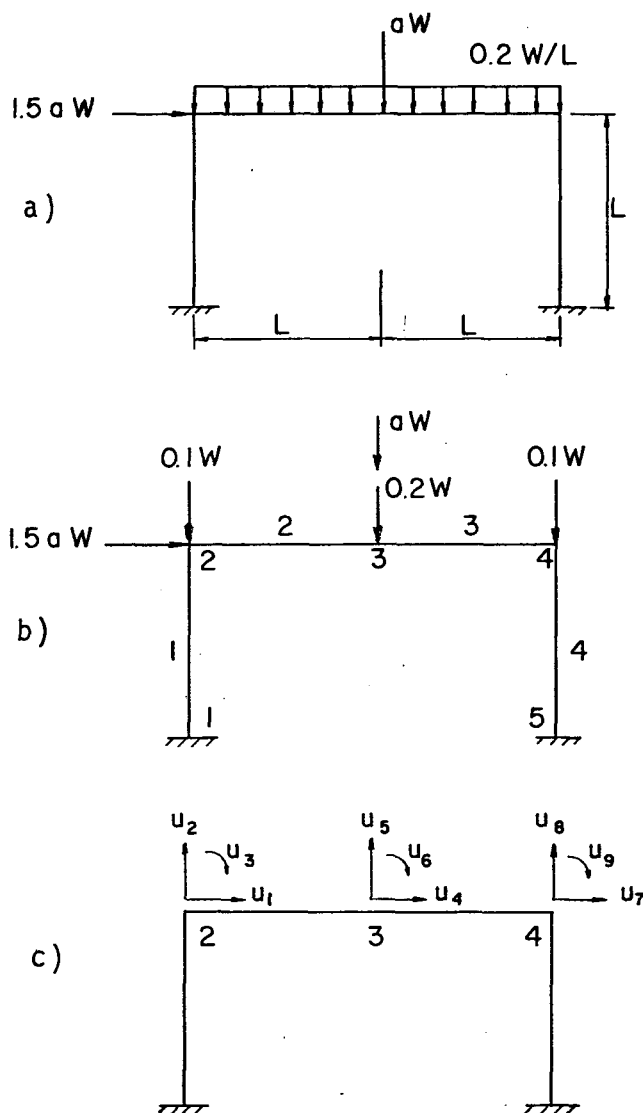


Fig. 3.4. Quadro plano. a) Carregamento real. b) Carregamento idealizado. c) Deslocamentos nodais.

### 3.3.a. Velocidades Generalizadas e Esforços Externos

As velocidades generalizadas da estrutura montada devem considerar todos os graus de liberdade nodais e em rótulas internas. Devem ser de tal forma a descartar os movimentos de corpo rígido e a satisfazer as condições cinemáticas de apoio e internas. Estas são referenciadas a um sistema global de coordenadas.

Para o pórtico plano da figura 3.4.a. tem-se três nós com deslocamentos e apoios fixos. Cada nó tem três deslocamentos, dois no plano (lineares) e uma rotação, ficando o vetor velocidade generalizada:

$$\underline{\dot{u}} = [\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{u}_3, \dot{u}_4, \dot{u}_5, \dot{u}_6, \dot{u}_7, \dot{u}_8, \dot{u}_9].$$

As cargas ou forças externas devem estar concentradas nos nós da estrutura montada. O vetor de esforços externos, deve corresponder exatamente ao vetor de velocidades generalizada. No exemplo,

$$\alpha \underline{\tilde{F}} = \alpha [1.5W, 0, 0, 0, -W, 0, 0, 0, 0].$$

Como para o colapso plástico a dissipação de energia é sempre positiva e a potência das forças externas sobre as velocidades generalizadas é maior ou igual à potência dissipada no interior da estrutura, tem-se

$$\underline{\tilde{F}} \cdot \underline{\dot{u}} = w \quad (3.22)$$

onde  $w$  é uma constante arbitrária que pode, sem perda de generalidade, ser tomada como unitária.

### 3.3.b. Relações de Compatibilidade e Equilíbrio

As condições de compatibilidade relacionam as taxas de deformação  $\underline{\dot{r}}$  com as velocidades generalizadas  $\underline{\dot{u}}$ . As taxas de de



formação estão expressas no sistema de coordenadas local do elemento. Expressando-as em termos do sistema global tem-se

$$\underline{\dot{r}}^i = \begin{bmatrix} \underline{\dot{r}}^j \\ \underline{\dot{r}}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{D}^j & \theta \\ \theta & \tilde{D}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\dot{r}}^j \\ \underline{\dot{r}}^k \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

onde  $\underline{\dot{r}}$  são as taxas de deformação no sistema local;  $\tilde{D}^j$ ,  $\tilde{D}^k$  são as matrizes de cossenos diretores para o elemento  $i$ , obtidas expressando o sistema local de coordenadas em termos das direções do sistema global fig. 3.5, e  $\underline{\dot{r}}^j$ ,  $\underline{\dot{r}}^k$  são os vetores taxa de deformação no sistema global. Assim, as matrizes  $\tilde{D}^j$  e  $\tilde{D}^k$  tem a forma

$$\tilde{D}^j = \tilde{D}^k = \begin{bmatrix} -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

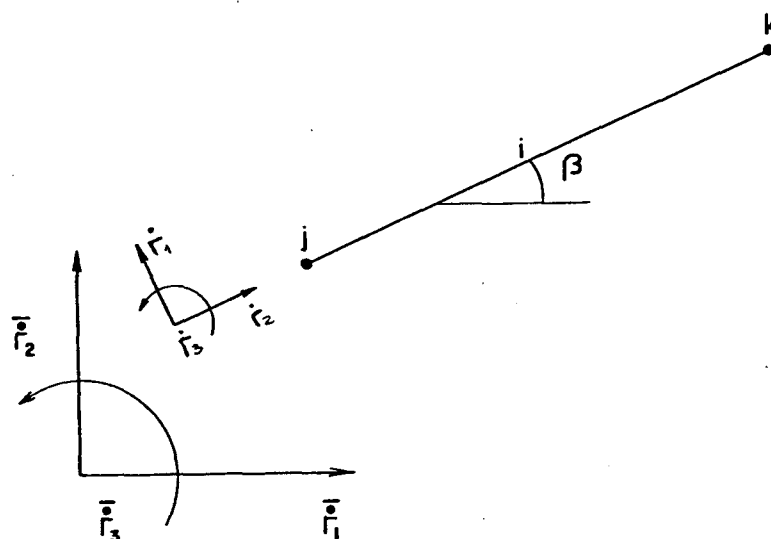


Fig. 3.5. Sistemas de coordenadas local e global para um elemento genérico de viga.

As taxas de deformação não-naturais, por sua vez, relacionam-se às velocidades generalizadas através de:

$$\dot{\bar{r}}^j = c^j \dot{\underline{u}} \quad , \quad \dot{\bar{r}}^k = c^k \dot{\underline{u}} \quad (3.24)$$

As matrizes  $c^j, c^k$  são matrizes booleanas que relacionam taxas de deformação em coordenadas globais nas seções extremas  $j$  e  $k$  às velocidades generalizadas. Seja o quadro da fig. 3.4., para o elemento nº 1, com a condição de apoio fixo, tem-se para a matriz  $c^1$ :

$$c^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

para elemento nº 2,

$$c^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente, expressando-se as taxas de deformação não-naturais em termos das taxas de deformação naturais, eq. 3.10, e usando 3.23 e 3.24 obtém-se

$$\dot{\underline{q}} = \tilde{B}^i \begin{bmatrix} \bar{D}^j & | & \theta \\ \theta & | & \bar{D}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^j \\ c^k \end{bmatrix} \dot{\underline{u}} \quad (3.25)$$

ou

$$\dot{\underline{q}}^i = \tilde{B}^i \tilde{D}^i c^i \dot{\underline{u}} \quad . \quad (3.26)$$

Fazendo  $C^i = B^i D^i C^i$ , escreve-se 3.26 na forma:

$$\dot{\underline{q}}^i = C^i \dot{\underline{u}} \quad (3.27)$$

Estendendo a todos os elementos tem-se

$$\dot{\underline{q}} = C \dot{\underline{u}} \quad (3.28)$$

onde

$$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_m \end{bmatrix}$$

Para os sistemas coordenadas da fig. 3.5 e o quadro plano da fig. 3.4., são montadas matrizes  $C$  para os elementos:

$$C^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/\ell & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/\ell & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\ell & 1 & 0 & -1/\ell & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\ell & 0 & 0 & -1/\ell & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/\ell & 1 & 0 & 1/\ell & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\ell & 0 & 0 & -1/\ell & 1 \end{bmatrix}$$

$$C^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/\ell & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\ell & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz de compatibilidade  $\tilde{e}$  é então formada agrupando-se as submatrizes correspondentes aos elementos, então:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/\ell & 0 & 0 \\ 1/\ell & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\ell & -1 & 0 & 1/\ell & 0 \\ 0 & 1/\ell & 0 & 0 & -1/\ell & 1 \\ \hline & & & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & -1/\ell & -1 & 0 & 1/\ell & 0 \\ & & & 0 & 1/\ell & 0 & 0 & -1/\ell & 1 \\ \hline & & & & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & & -1/\ell & 0 & 0 \\ & & & & & & 1/\ell & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

As relações de equilíbrio são obtidas aplicando-se o princípio da contragradência à equação 3.28., ficando então:

$$\tilde{C}Q - \alpha F = 0. \quad (3.29)$$

### 3.4. Análise Limite

As relações que governam a análise rígido-plástica são então agrupadas. Tem-se então,

$$\tilde{N} \underline{Q} \leq \underline{R},$$

$$-\underline{\phi} \geq \underline{\theta},$$

$$\underline{\dot{\lambda}} \geq \underline{\theta}$$

$$\underline{\dot{\phi}} \underline{\dot{\lambda}} = 0, \quad (3.30.a,b,c,d,e,f,g)$$

$$\underline{\tilde{F}} \underline{\dot{u}} = 1,$$

$$C \underline{\dot{u}} - N \underline{\dot{\lambda}} = \underline{\theta}$$

$$\tilde{C} \underline{Q} - \alpha \underline{F} = \underline{\theta},$$

onde 3.30.a,b,c,d formam as relações constitutivas da estrutura, eq. 3.21.a,b,c,d. A equação 3.30.e especifica a taxa de dissipação de energia positiva para o colapso, eq. 3.22. Obtém-se 3.30.f substituindo-se 3.21.b em 3.28, que forma então as relações de compatibilidade.

Estas formam as condições de Karush-Kuhn-Tucker para os problemas 2.30.a,b,c e 2.31.a,b,c,d deduzidos no capítulo 2, tendo-se então perfeitamente definida a análise limite de estruturas reticulares planas. No capítulo cinco, são apresentados aplicações numéricas.

## CAPÍTULO 4 - DETERMINAÇÃO DE CONDIÇÕES DE ESCOAMENTO LPP

### 4.1. Introdução

Até o momento, as condições de escoamento foram consideradas como um dado disponível. Entretanto, como foi visto na seção 1.2. a., sua determinação para o caso de esforços combinados é difícil e trabalhosa, o que limita sua aplicabilidade. Ao serem aplicados os conceitos desenvolvidos no cap. 2 a uma seção plana discretizada em elementos de tensão plana que obedecem ao critério de von Mises, e considerando como esforços externos as resultantes de tensão ativas na seção (momentos, torção, normal), obtêm-se um meio de gerar condições de escoamento LPP em forma sistemática para as mais diversas condições de geometria e carregamento<sup>[5]</sup>. Neste trabalho, os elementos seção ("section elements"<sup>[27]</sup>) serão retangulares ou quadrados, e serão consideradas seções quadradas, caixão e aba-larga ("wide-flange"). A conceituação matemática é análoga à vista na seção anterior. Em vista disso, às grandezas usadas anteriormente superimpõem-se um asterisco,\*, desta forma identificando-se os termos análogos nos dois desenvolvimentos.

### 4.2. Relações Constitutivas para um Elemento Individual

Para uma seção transversal com duplo eixo de simetria, fig. 4.1. tem-se, para as diversas solicitações possíveis, as componentes de tensão  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  e as resultantes seccionais de tensão serão os momentos fletores  $M_x$  e  $M_y$ , o momento torçor  $T_z$ , os

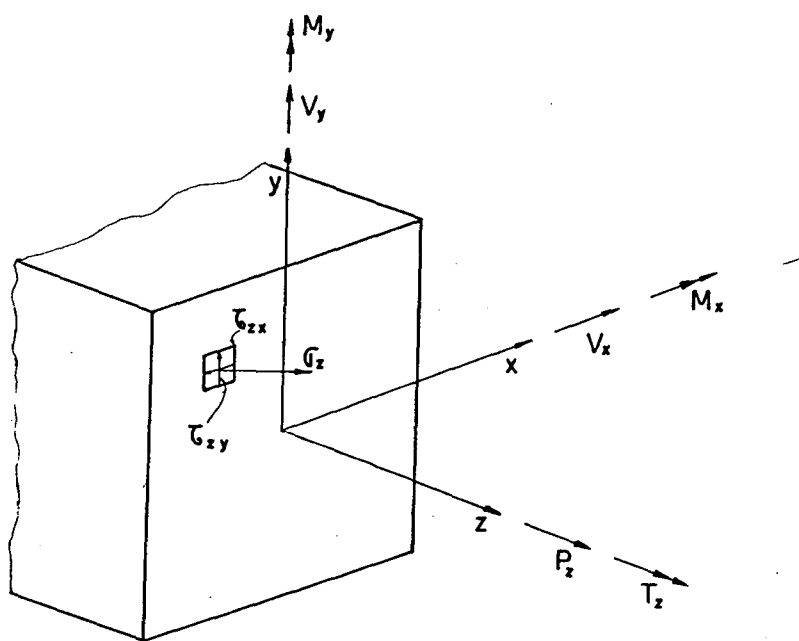


Fig. 4.1. Tensões ativas e resultantes de tensão em uma seção transversal.

cisalhamentos  $V_y$  e  $V_x$  e a força normal  $N_z$ . Assim, o vetor das componentes de tensão em um ponto será

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_z \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

e o vetor taxas de deformação correspondente será

$$\dot{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_z \\ \dot{\gamma}_{xz} \\ \dot{\gamma}_{yz} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

de forma que a energia dissipada no volume elementar seja dada por

$$d\dot{D} = \underline{\tilde{\sigma}} \cdot \underline{\dot{\epsilon}} dV \quad (4.3)$$

Os vetores tensão natural (generalizada) e taxa de deformação natural serão, respectivamente:

$$\underline{\dot{Q}}^* = \underline{\sigma} \quad , \quad (4.4)$$

$$\underline{\dot{q}}^* = \underline{\dot{\epsilon}} \quad . \quad (4.5)$$

O vetor tensão não natural,  $\underline{\dot{R}}^i$ , correspondente a um elemento de área  $a^i$  fig. 4.1., relaciona-se com as tensões naturais existentes no elemento pela relação,

$$\underline{\dot{R}}^i = \underline{\dot{B}}^i \underline{\dot{Q}}^i = \text{diag} [a^i] \underline{\dot{Q}}^i \quad . \quad (4.6)$$

Por sua vez, as tensões generalizadas ativas no elemento  $i$ , serão definidas por,

$$\underline{\dot{S}}^i = \underline{\dot{X}}^i \underline{\dot{A}}^i \underline{\dot{B}}^i \underline{\dot{Q}}^i \quad (4.7)$$

onde  $\underline{\dot{A}}^i$  é uma matriz booleana que define a tensão generalizada considerada como ativa, e  $\underline{\dot{X}}^i$  normaliza o valor da tensão natural. Ou seja, para  $\underline{\dot{S}}^i = [S_1, S_2]$  na figura 4.2.:



$$\begin{matrix} *1 \\ X \end{matrix} = \begin{matrix} *2 \\ X \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a^i \sigma_0 & \\ 0 & 1 \\ & a^i \tau_0 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} *1 \\ A \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} *2 \\ A \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim tem-se  $\tilde{S}^1 = [\sigma_z/\sigma_0 \quad \tau_{yz}/\tau_0]$ ,  $\tilde{S}^2 = [\sigma_z/\sigma_0 \quad \tau_{xz}/\tau_0]$  onde  $\sigma_0$  e  $\tau_0$  são, respectivamente, as tensões de escoamento para as tensões normal e cisalhante.

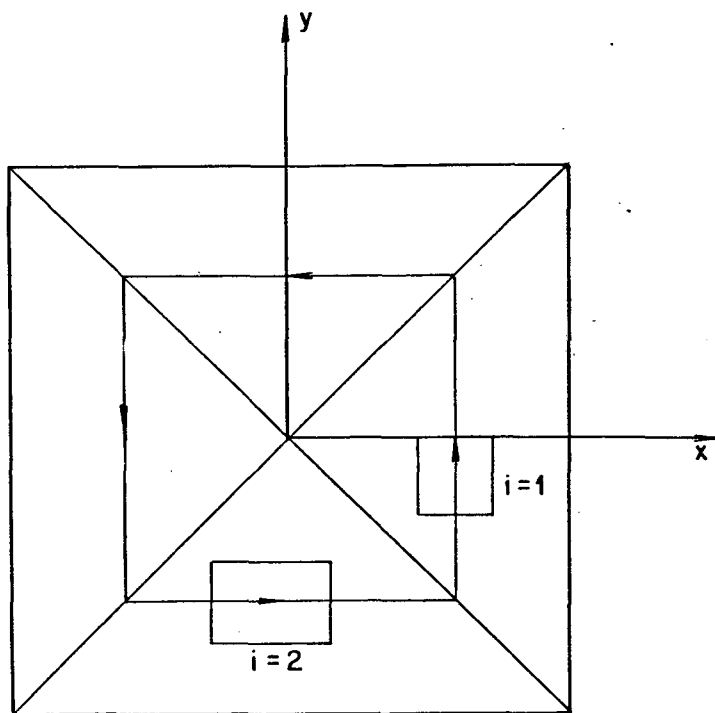


Fig. 4.2. Distribuição de tensões cisalhantes considerando a analogia do monte de areia.

Para flexão pura, ou flexão mais esforço normal, considera-se para  $\underline{\tilde{S}}^i$  apenas o esforço normal. Para a torção simples tem-se uma única tensão cisalhante para cada elemento e não se considera a restrição ao empenamento da seção; a direção da tensão cisalhante é dada pela analogia do monte de areia fig. 4.2.. Para combinações de momento, ou momentos, e/ou força normal tem-se tensões normais e cisalhantes combinadas. A direção das tensões cisalhantes, nestes casos, também é tomada como sendo dada pela analogia do monte de areia<sup>[27]</sup>. Não se considera a tensão cisalhante devida ao cisalhamento direto da seção.

O material é governado pelo critério de von Mises, que, em termos de tensões normalizadas, fica<sup>[20]</sup>,

$$\left[ \frac{\sigma_z}{\tau_0} \right]^2 + \left[ \frac{\tau_{xz}}{\tau_0} \right]^2 + \left[ \frac{\tau_{yz}}{\tau_0} \right]^2 \leq 1, \quad (4.8)$$

ou, expresso em termos de tensões ativas, como foi definido nesta seção, torna-se

$$\underline{\tilde{S}}^i \underline{\tilde{S}}^i \leq 1. \quad (4.9)$$

A equação 4.9 representa uma esfera no espaço das tensões normalizadas (fig. 4.3.).

Lineariza-se então o critério de escoamento, de modo já visto, ficando

$$\underline{n}^i \underline{\tilde{S}}^i \leq \underline{R}^i \quad (4.10)$$

onde, substituindo-se o valor de  $\underline{\tilde{S}}^*$  como o obtido em 4.7., vem,

$$\tilde{n}^i \tilde{X}^i \tilde{A}^i \tilde{B}^i \tilde{Q}^i < \underline{R}^i \quad (4.11)$$

Finalmente, fazendo  $\tilde{N}^i = \tilde{n}^i \tilde{X}^i \tilde{A}^i \tilde{B}^i$  e agrupando para todos os "m" elementos seção tem-se a condição de escoamento para a seção desmontada,

$$\tilde{N}^* \underline{Q} < \underline{R}^* \quad (4.12)$$

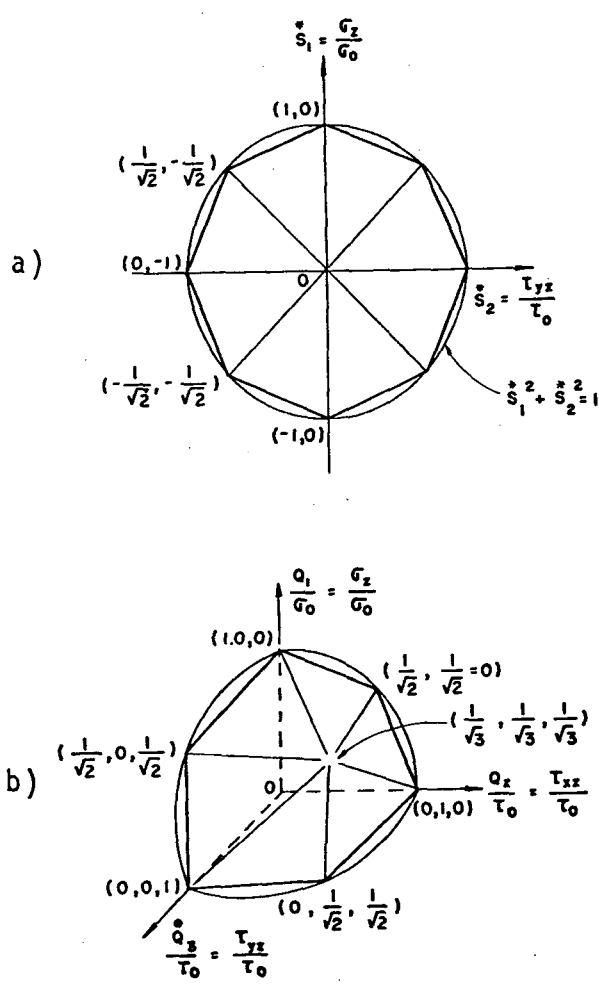


Fig. 4.3. Critério de escoamento de von Mises linearizado.  
a) Tensão normal mais cisalhante. b) Tensão normal e duas componentes cisalhantes,  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$ .

### 4.3. Seção Transversal Montada

Da mesma forma que para a estrutura, as relações que descrevem o comportamento da seção transversal montada referem-se às condições de compatibilidade e equilíbrio. O equilíbrio ao longo do comprimento do elemento de viga correspondente à seção  $k$  é ignorado, estabelecendo-se uma condição de equilíbrio restrita à seção somente. Da mesma forma que para a eq. 2.8., sobre todos os  $m$  elementos da seção e considerando  $\underline{\tilde{S}}_k^*$  como as resultantes de tensão ativas na seção, vem:

$$\underline{\tilde{C}}^* \underline{\tilde{Q}}^* = \underline{\tilde{S}}_k^* \quad (4.13)$$

onde  $\underline{\tilde{C}}^*$  é a matriz de compatibilidade formada por " $m$ " matrizes  $\tilde{C}^{*i} = \underline{\tilde{B}}^i \underline{\tilde{D}}^{*i} \underline{\tilde{C}}^i$   $\underline{\tilde{A}}_k \underline{\tilde{X}}_k$ . A matriz  $\underline{\tilde{B}}^*$  é definida pela eq. 4.6. e a matriz  $\underline{\tilde{D}}^{*i}$  é a matriz de transformação entre o sistema de coordenadas locais do elemento e o sistema global, locado no centróide da seção. Para a maioria dos casos considerados, os dois sistemas tem a mesma orientação, o que faz  $\underline{\tilde{D}}^{*i}$  ser uma matriz identidade. Entretanto, se a seção estiver inclinada de um ângulo  $\alpha$  em relação ao eixo "x" fig. 4.4., a matriz será dada por

$$\underline{\tilde{D}}^* = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

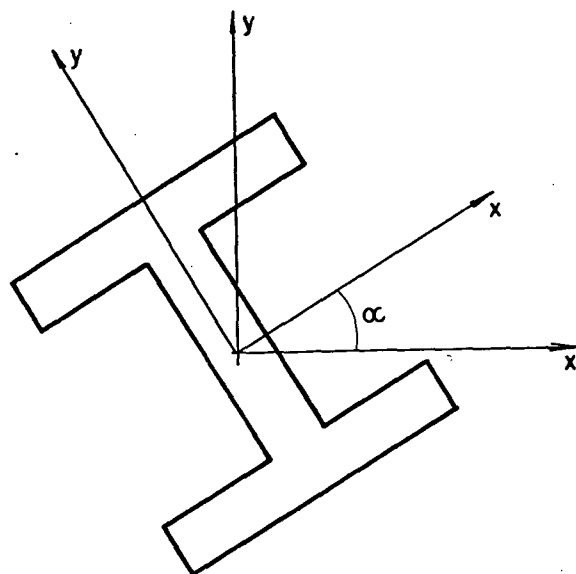


Fig. 4.4. Seção transversal inclinada.

A matriz  $\bar{c}^{*i}$  estabelece a relação geométrica entre as taxas de deslocamento globais,  $\underline{r}^i$ , para o elemento  $i$  e as taxas de deslocamento existente na seção transversal notada por  $\underline{\dot{r}}$ . Considera-se que estas relações sejam lineares e baseadas na hipótese de que as seções permaneçam planas, ou seja, na teoria elementar das vigas. Para esforços cisalhantes provenientes da torção esta hipótese não considera a possibilidade de empenamento para o estabelecimento das taxas de deformação cisalhantes <sup>[27]</sup>. Para a fig. 4.5. e considerando-se todos os esforços, tem-se

$$\bar{c}^{*i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & y^i & -x^i \\ 0 & 0 & 1 & -y^i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x^i & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

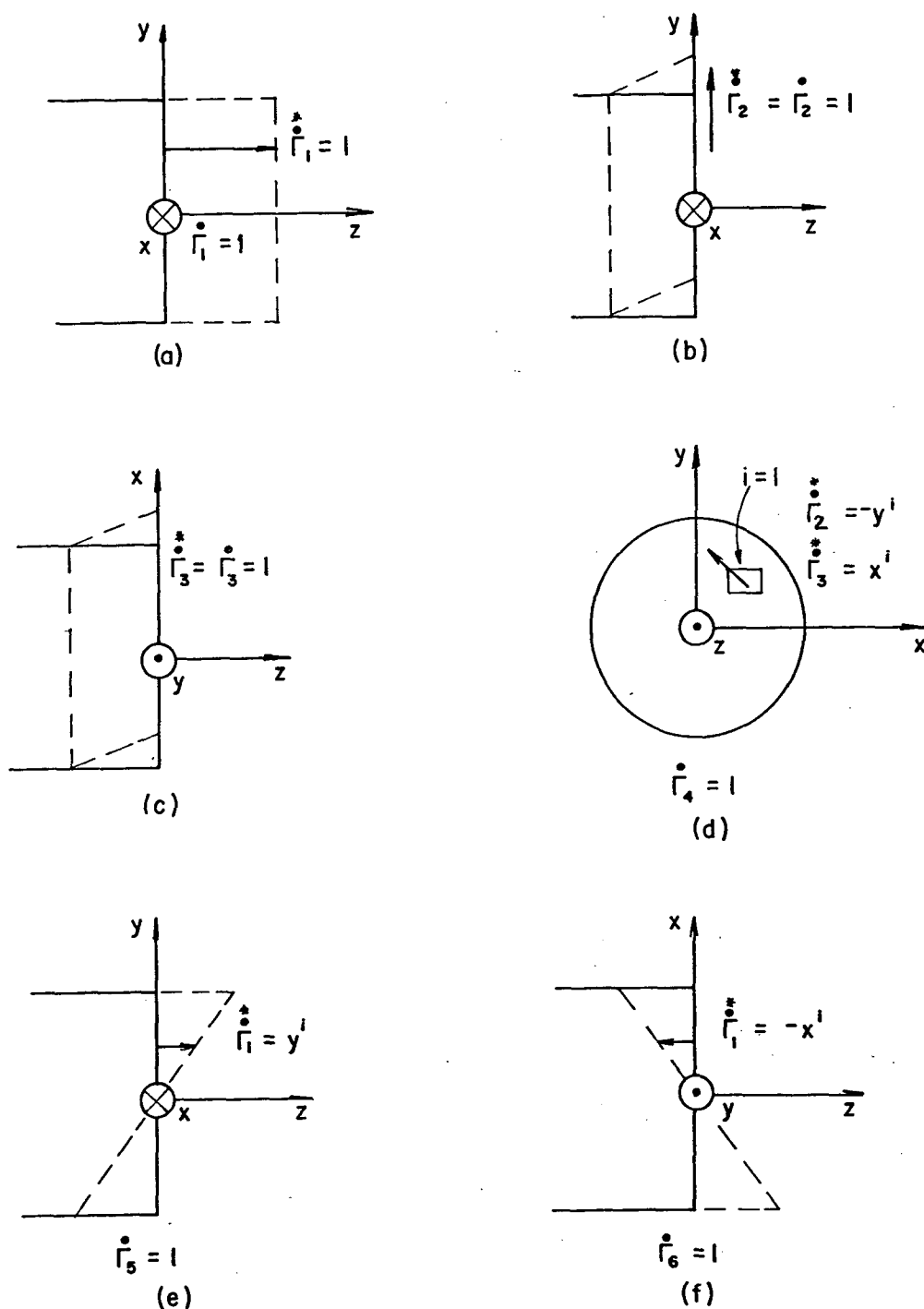


Fig. 4.5. Relações entre taxas de deslocamento nos elementos e taxas de deformação na seção  $k$ .

Na figura 4.5. são aplicados os deslocamentos unitários correspondentes à matriz  $\dot{c}^{*i}$ . As matrizes  $\tilde{A}_k$   $\tilde{X}_k$  são, respectivamente, a matriz booleana que identifica as resultantes de tensões ativas

na seção e a matriz que normaliza estas mesmas resultantes. Da fi  
gura 4.6. temos:

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

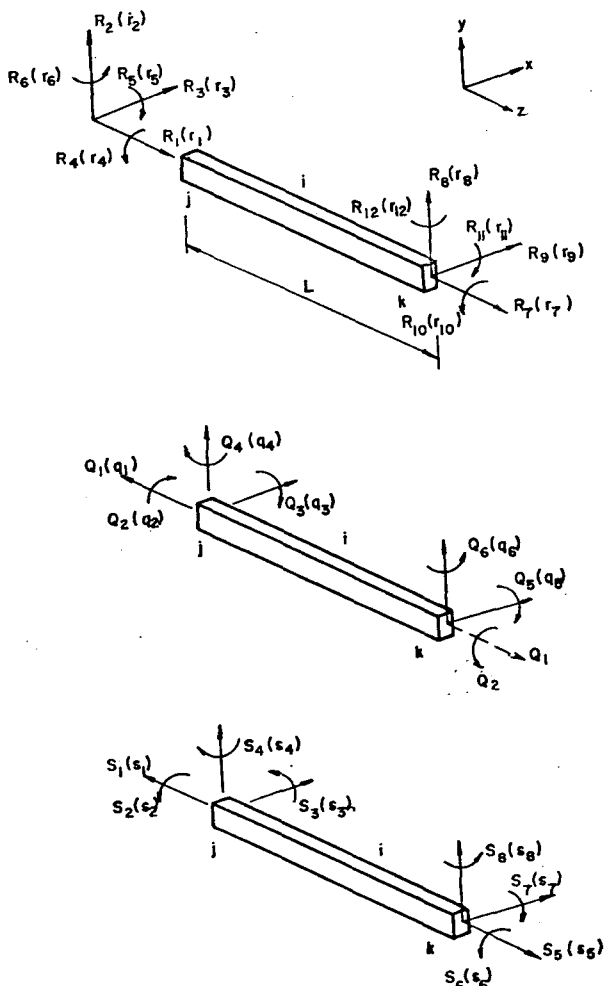


Fig. 4.6. Elemento genérico de viga tridimensional. a) Resultantes de tensão não-naturais. b) Resultantes de tensão naturais. c) Resultantes de tensão ativas.

Uma vez definidos os elementos  $\bar{B}^i$ ,  $\bar{D}^i$ ,  $\bar{C}^i$ ,  $A_k$  e  $X_k$ , para a matriz de compatibilidade, tem-se, para a estrutura montada,

$$\bar{CQ}^{**} - \bar{S}_k^* = \underline{\theta} \quad (4.14.a,b)$$

#### 4.4. Geração das Condições L.P.P.

Um conjunto qualquer de tensões generalizadas  $\bar{S}_k^*$ , atuando de forma a definir um raio-vetor no espaço das tensões para a seção considerada, será denotado por

$$\bar{S}_k = \alpha \bar{F}^{**}, \quad (4.15)$$

onde  $\bar{F}^*$  é o vetor dos cossenos diretores que definem a direção do raio-vetor e  $\alpha$  será o módulo do mesmo. Por exemplo na fig. 4.7.,  $\bar{F}^* = |0,1, 0,1|$  e  $\bar{S}^* = 7.21 \bar{F}^*$ . E, das condições de escoamento e de equilíbrio, e considerando o vetor  $\alpha \bar{F}^{**}$  como de esforços externos, pode-se definir a maneira de determinar um ponto na superfície de escoamento para a seção, pela rotina:

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} && \alpha^* \\ &\text{sujeito a} && \bar{CQ}^{**} - \alpha \bar{F}^{**} = \underline{\theta} \\ & && \bar{NQ}^* \leq \bar{R}^* \\ & && -\phi \geq \underline{\theta} \end{aligned} \quad (4.16.a,b,c)$$



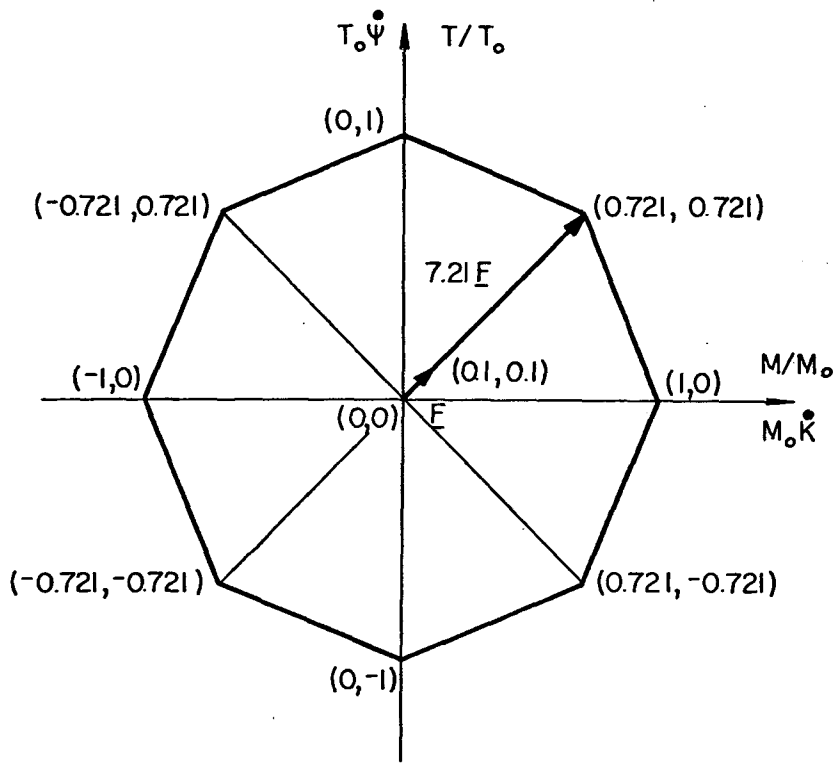


Fig. 4.7. Critério de escoamento linearizado para elemento de grelha (M+T), ref. 5.

O problema anterior está de acordo com a formulação estática e, o problema dual é dado por:

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar} && \underline{\dot{\tilde{R}}^* \lambda} \\
 &\text{sujeito a} && \underline{\dot{C}^* r} - \underline{\dot{N}^* \lambda} = \underline{\theta}, && (4.17.a,b,c) \\
 &&& \underline{\dot{F}^* r} = 1
 \end{aligned}$$

$$e \quad \underline{\dot{\lambda}} \geq \underline{\theta},$$

onde o vetor  $\underline{\dot{r}}$  é equivalente, no sentido matemático, ao vetor  $\underline{\dot{u}}$  de 2.25.c, e representa fisicamente uma taxa de deformação local  $\underline{\dot{u}}$

zada de seção  $k$ .

Na literatura, a ênfase tem sido dada à formulação estática pelo fato de sua interpretação física apresentar maior comodidade. Esta formulação permite, ainda um importante aperfeiçoamento, qual seja a formulação estática decomposta, da qual é possível obter razoável redução no número de equações do problema. Neste trabalho, serão consideradas ambas as formulações (estática e cinemática), ficando a implementação da formulação estática decomposta para futura abordagem.

## CAPÍTULO 5 - RESULTADOS E CONCLUSÕES

## 5.1. Introdução

Nas seções 5.2 e 5.3 são apresentados exemplos típicos de aplicações numéricas com o objetivo de se ilustrar aspectos importantes das formulações e sua aplicabilidade. Na seção 5.4 é feita uma análise das formulações; por último nas seções 5.5 e 5.6 são apresentadas, respectivamente, conclusões e sugestões para próximos trabalhos.

## 5.2. Quadro plano simples, fig. 5.1.

O quadro plano simples, é analisado considerando-se a formulação desenvolvida no capítulo terceiro. Ou seja, realiza-se a Análise Limite considerando-se os esforços de flexão e axiais. Considera-se constituído de vigas de seção tipo aba larga (wide flange) ou sanduíche, cuja condição de escoamento é representada graficamente na fig. 5.2.

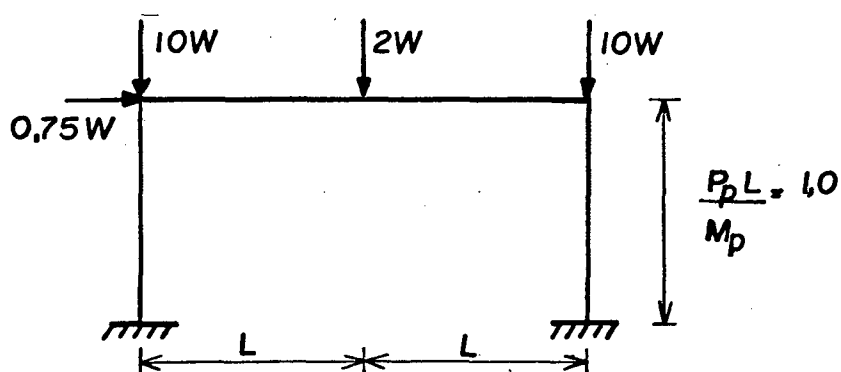


Fig. 5.1. Quadro plano simples, geometria e carregamento.

A matriz de normais unitárias da condição de escoamento é então definida como sendo

$$n^j = n^k = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

e da equação 3.16. obtêm-se a matriz  $N^i$ ,

$$N^i = \begin{bmatrix} 1/Pp & 1/Pp & -1/Pp & -1/Pp \\ 1/Mp & -1/Mp & -1/Mp & 1/Mp \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/Pp & 1/Pp & -1/Pp & -1/Pp \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/Mp & -1/Mp & -1/Mp & 1/Mp \end{bmatrix}$$

e o vetor  $R^i$  através de 3.15,

$$\underline{\tilde{R}} = 1/\sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

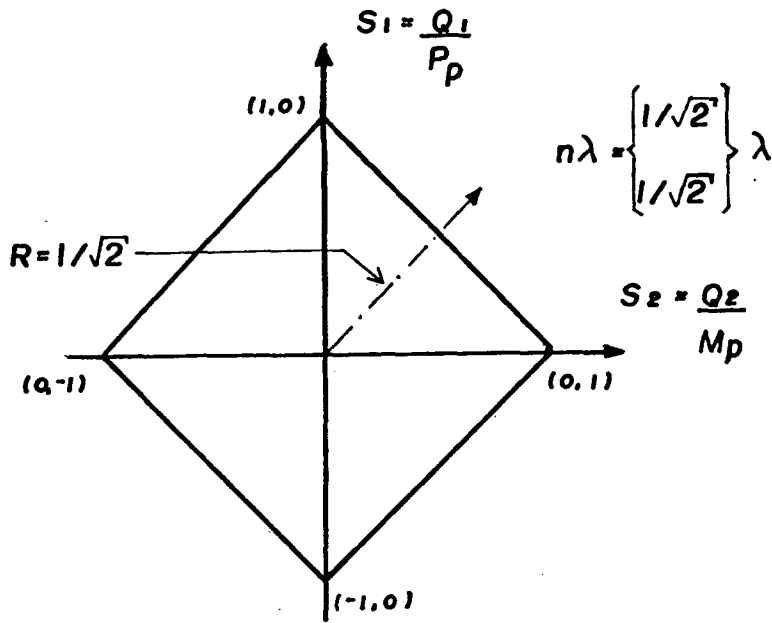


Fig. 5.2. Condição de escoamento linearizada para seções I e sanduíche.

Considerando-se a formulação cinemática, então, tem-se de 2.31. a, b, c, d:

$$\text{minimizar} \quad \underline{\tilde{R}} \dot{\underline{\lambda}},$$

$$\text{sujeito a} \quad \underline{N} \dot{\underline{\lambda}} - \underline{C} \dot{\underline{u}} = \underline{\theta},$$

$$\underline{\tilde{F}} \dot{\underline{u}} = 1$$

$$\text{e} \quad \dot{\underline{\lambda}} > \underline{\theta}$$

onde, o supervetor  $\dot{\underline{\lambda}}$  na primeira restrição corresponde à reunião de todos os vetores normais correspondentes aos modos de escoamento de cada seção. Desta forma, a matriz  $\underline{N}$  é bloco-diagonal e a matriz  $\underline{C}$  é

a mesma desenvolvida no capítulo terceiro. Para a matriz  $C$ , a especificação das condições de contorno de apoio não necessita obrigatoriamente do uso das matrizes booleanas  $c^j$  e  $c^k$ , uma vez que a  $c$ -ésima coluna da matriz  $C$  corresponde ao deslocamento  $u_c$  aplicado ao elemento, e uma vez estando restrito por vínculo, a coluna correspondente a ele é nula.

A segunda restrição consiste de apenas uma equação. Reunindo-se o conjunto de restrições em uma única matriz de coeficientes obtém-se:

minimizar  $R \dot{\lambda}$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} N & I & C \\ \theta & I & \tilde{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\lambda} \\ \dot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

5.1.

onde as variáveis  $\dot{\lambda}$  e  $\dot{u}$  são, respectivamente limitada e ilimitada em sinal.

Este problema, na formulação cinemática consta de treze restrições e quarenta e uma variáveis; destas, trinta e duas correspondem à descrição linearizada da regra de escoamento.

A solução numérica deste problema foi obtida usando o programa PROJECT<sup>[61]</sup>, obtendo-se para o valor do multiplicador de colapso  $\alpha = M_p/WL = 1,82158$  que, comparado com o obtido por Grierson & Basset<sup>27</sup>,  $\alpha = M_p/WL = 1,822$  consiste em um bom resultado. Um aspecto importante a ser lembrado é que para a abordagem cinemática os valores de  $\dot{\lambda}$  consistem de taxas de multiplicadores plásticos, que não

trazem informação sobre as taxas de deformação localizadas, ou o mecanismo de colapso. A saída para se obter tal informação é utilizar-se a equação 3.21.b., obtendo-se assim os vetores que especificam o mecanismo de colapso.

### 5.3. Seção I

Seja a viga I de dimensões dadas pela fig. 5.3.a. e propõe-se analisá-lo pelo método estático, determinando-se as coordenadas do ponto do domínio convexo representado pela condição de escoamento da seção que está assente sobre a bissetriz do quadrante positivo do mesmo.

Serão considerados como resultantes de tensão o momento fletor  $M_x$  e a força normal  $N_z$ .

Neste caso tem-se somente uma tensão ativa, a tensão normal  $\sigma_z$ , e a matriz  $\tilde{N}^*$  é obtida da equação 4.11. e dada por:

$$\begin{bmatrix} 1/\sigma_0 & 0 & 0 \\ -1/\sigma_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz de compatibilidade é obtida de 4.13.b, e para ilustrar, tomando uma matriz que considere todas as resultantes de tensão consideradas, para a seção,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $N_z$  e  $T_z$  tem-se:

$$\bar{C}^{*i} = \begin{bmatrix} \frac{a_i}{N_{pz}} & 0 & \frac{a_i y_i}{M_{px}} & \frac{-a_i x_i}{M_{py}} \\ 0 & \frac{-a_i y_i}{T_{pz}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_i x_i}{T_{pz}} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Da matriz  $\bar{C}^{*i}$  simplesmente descartam-se os termos que representam as resultantes de tensão seccionais não consideradas, ou seja, a segunda e a quarta coluna. Observe-se também que cada coluna de  $\bar{C}^{*i}$  corresponde a um deslocamento generalizado da seção transversal, fig. 4.5, e suas linhas correspondem às tensões elementares.

Para a formulação estática tem-se então,

minimizar  $\alpha^*$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} \bar{N}^* & \theta \\ \bar{C}^* & \bar{F}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Q}^* \\ -\alpha^* \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \bar{R}^* \\ \theta \end{bmatrix},$$

onde  $\bar{F}$  é o vetor de esforços externos e o termo  $\bar{C}^*$  consiste do emparelhamento das matrizes elementares  $\bar{C}^{*i}$ .



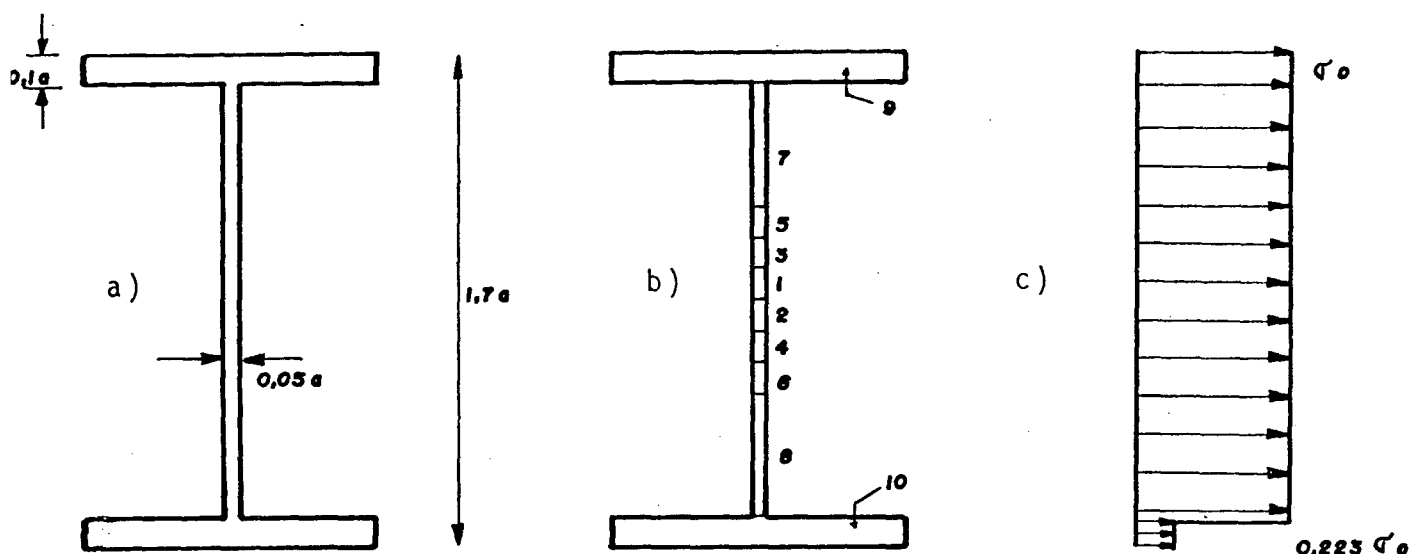


Fig. 5.3. Seção I, a) Geometria, b) Discretização grosseira c) Diagrama de tensões.

Para uma discretização grosseira, compatível com o preparo manual dos dados, fig. 5.3.b, obteve-se utilizando um pacote computacional de PL para microcomputador (LINDO<sup>[68]</sup>), o valor de 0,716 para as coordenadas do ponto bisetor. E o calculado com malha refinada, conforme Baset<sup>[27]</sup>, apresentou o valor de 0,545 para as coordenadas do ponto bisetor. Analisando-se os resultados, fig. 5.3.c, notou-se que todo um elemento que representa a aba inferior da seção está não plastificado, e, da grande influência da aba na resistência de uma seção deste tipo à flexão, para se obter uma melhora no resultado deve-se proceder a um refino da malha nesta região.

#### 5.4. Comentários sobre as formulações apresentadas.

Analisando-se a estrutura dos problemas, observam-se dois fatos: o primeiro é a forma decisiva como o nível de linearização governa o porte dos problemas; o segundo refere-se ao número de variáveis e restrições em ambas as formulações. Para a formulação cinemática, o número de restrições é dado por

$$r = mn + 1$$

onde  $m$  é o número de elementos,  $n$  o número de resultantes de tensão considerados nos elementos. O número de variáveis por sua vez é dado por

$$v = 2mh + f,$$

onde  $m$  é o número de elementos,  $h$  o número de normais consideradas na descrição LPP da condição de escoamento e  $f$  é o número de graus de liberdade da estrutura. O número de restrições e variáveis na formulação estática é, respectivamente, igual ao número de variáveis e restrições da formulação cinemática. Este fato, torna a formulação cinemática computacionalmente mais vantajosa, pois o número de operações aritméticas executadas no algoritmo simplex, ou o PROJECT cresce mais com o acréscimo de restrições que de variáveis.<sup>[55]</sup> Grierson e Baset<sup>[27]</sup> apresentam uma melhora à formulação estática, chamada formulação estática decomposta, que se aproveita da estrutura particular desta formulação e introduz uma mudança de variáveis que a torna particularmente interessante para problemas de grande porte.

Um outro aspecto importante ao se considerar o uso de um pacote computacional de uso geral é a facilidade com que se pode gerar automaticamente as restrições e demais dados de entrada do problema. Neste caso, a formulação cinemática continua sendo mais favorável, pois as restrições são geradas elemento a elemento, iterativamente. Na formulação estática, por outro lado, as restrições correspondentes às equações de equilíbrio são geradas iterativamente a partir dos nós, exigindo a manipulação de arquivos de incidências nodais, que tornam a programação mais sofisticada.

### 5.5. Conclusões

A primeira conclusão é que se pode tratar os problemas de Análise Limite em estruturas de forma rigorosa e formal não apenas em teoria mas também na formulação numérica. Com isto, a Análise Limite alcança nível de generalidade equivalente aos modernos métodos da análise elástica, inclusive deles fazendo recurso [ 63 ] .

Em segundo lugar, salienta-se o papel da Programação Matemática como ferramenta não apenas de solução numérica mas como tendo possibilidades de estabelecer aspectos inéditos na compreensão da teoria.

Em terceiro lugar, constata-se que estas formulações dependem inteiramente de computadores; mesmo os problemas mais simples, como os aqui apresentados, a simples construção das restrições, e da função objetivo é tediosa e ainda, o cálculo manual torna-se inviável. Problemas de maior porte necessitam de computadores de grande capacidade. Este fator, juntamente com a deficiência em obras publicadas e trabalhos que apresentam a Análise Limite de forma unificada, tem contribuído para a sua relativa pouca difusão.

Por último, e o fato mais importante, é que uma forma de se analisar um sistema estrutural e estabelecer a este uma estimativa racional do seu fator de segurança real à ruptura, ou, ao colapso plástico simples, que possa ser formulado de forma geral, e com as mesmas possibilidades da análise elástica convencional não pode passar despercebido; pelas informações que pode trazer ao projeto de uma estrutura ou elemento mecânico.

## 5.6. Recomendações para próximos trabalhos

Numa primeira fase, a implementação de um sistema computacional acoplado a um pacote de PL de uso geral, tendo em seu interior a possibilidade de trabalhar com as formulações cinemática, estática decomposta, tendo ainda a capacidade de dar tratamento adequado ao relatório de saída deste programa.

Em uma segunda fase, o desenvolvimento de programas que tenham embutidos dentro de si algoritmos de Programação Matemática especialmente desenvolvidos para tomar partido da estrutura particular dos problemas de Plasticidade, então concebidos de forma modular, podendo utilizar recursos já disponíveis para a análise elástica convencional, obtendo-se com isto ferramentas de análise bastante poderosas. Tal conceito é o usado no desenvolvimento do programa STRUPL<sup>[63]</sup>, que visa dotar a análise plástica de ferramental comparável ao hoje existente para a análise elástica.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Prager, W., *"An Introduction to Plasticity"*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1959.
- [2] Massonnet, C. e Save, M., *"Plastic Analysis and Design"*, Vol. 1, Beams and Frames, Blaisdell Publ., New York., 1965.
- [3] Martin, J.B., *"Plasticity: Fundamentals and General Results"*, MIT Press, Cambridge, Mass., 1975.
- [4] Baker, J.F., Horne, M.R. e Heyman, J., *"The Steel Skeleton"*, Vol. 2, Cambridge University Press, London, 1956.
- [5] Grierson, D.E., "Collapse Load Analysis". In: *Engineering Plasticity by Mathematical Programming*, eds. M.Z. Cohn & G. Maier, Pergamon Press, New York, 1979, pp. 93-105.
- [6] Saint Venant B., "Mémoire sur l'établissement des équations différentielles des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état", *C.R. Acad. Sci.* (Paris), 70 (1870), 473-480.
- [7] Lévy M., "Mémoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delà des limites ou l'élasticité pourrait à leur premier état". *C.R. Acad. Sci.* (Paris), 70 (1870), 1323-1325.

- [8] Tresca H., "Mémoire sur l'écoulement des corps solides", *Mém. prés. par div. savants*, 18 (1868), 733-799.
- [9] von Mises R., "Mechanik der festen Körper im plastischen de  
formablen Zustand", *Göttinger Nachrichten, math. phys. Kl.*  
(1913) 582-592.
- [10] von Mises R., "Mechanik der plastischen Formänderung von  
Kristallen", *Z. angew. Math. Mech.*, 8 (1928), 161-185.
- [11] Koiter W.T., "Stress-Strain relations, uniqueness and varia  
tional theorems for elastic-plastic materials whit a  
singular yield surface", *Quart. Appl. Math.*, 11 (1953),  
350-354.
- [12] Hill R., "*The Mathematical Theory of Plasticity*", University  
Press, Oxford, 1950.
- [13] Prager W. and P.G. Hodge Jr., "*Theory os Perfectly Plastic So  
lids*", Wiley, N. York, 1951.
- [14] Koiter, W.T., "General Theorems for Elastic Plastic Solids", in  
*Progress in Solid Mechanics*, Vol. 1, eds. Sneddon & Hill,  
North Holland, Amsterdam, 1964, p. 167-221.
- [15] Hill, R., "A variational principle of maximum plastic work in  
classical plasticity", *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 1 (1948),  
18-28.

- [16] Markov, A.A., "Variational principles in the theory of plasticity", *Priklad. Mat. Mekh.* 11 (1947), 339-350.
- [17] Sadowsky, M.A., "A principle of maximum plastic resistance", *J. Appl. Mech. ASME*, 10 (1973), 65-68.
- [18] Kachanov, L.M., "*Foundations of the theory of plasticity*", North Holland, Amsterdam, 1971.
- [19] Maier, G., "A matrix structural theory of piecewise linear elastoplasticity with interacting yield planes", *Meccanica*, 5(1970), 54-66.
- [20] Hodge, P.H. Jr., "*Plastic Analysis of Structures*", McGraw-Hill, N. York, 1959.
- [21] Johnson, W. and Mellor, P.B., "*Plasticity for Mechanical Engineers*", Van Nostrand, Princeton, 1962.
- [22] Handelman, G.H., "A Variational Principle for a State of Combined Plastic Stress", *Quart. Appl. Math.*, 1 (1944), 351-353.
- [23] Steele, M.C., "The Plastic bending and Twisting of Square Members", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 3, No. 2, 1954, pp. 156-166.
- [24] Hill, R., & Siebel, M.P.L., "On Combined Bending and Twisting", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 1, No. 3, 1953, pp. 207-214.

- [25] Gaydon, F.A., & Nuttal, H., "On the Combined Bending and Twisting of Beams of Various Sections", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 6, No. 1, 1957, pp. 17-26.
- [26] Morris, G.A., and Fenves, S.J., "Approximate Yield Surface Equations", *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 97, No. EM4, Proc. Paper 6741, Aug., 1969, pp. 937-954.
- [27] Grierson, D.E., and Abdel-Baset, S.B., "Plastic Analysis under Combined Stresses", *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 103, No. EM5, Oct., 1977, pp. 837-854.
- [28] Kazinczy, G., "Experimentos em vigas engastadas" (em Húngaro), *Betonszemle*, 2, (1914) 68.
- [29] Kist, N.C., "Inaugural Dissertation", Polytechnic Institute, Delft (1917).
- [30] Maier-Leibnitz, H., "Beitrag zur Frage der tatsächlichen Tragfähigkeit einfacher and durchlaufender Balkentäger aus Baustahl St. 37 und aus Holz", *Bautechnik*, 6, 11(1928).
- [31] Maier-Leibnitz, H., "Versuche mit eingespannten und einfachen Balken von I-form aus St. 37", *Bautechnik*, 7, 313(1929).
- [32] Bleich, F. "Stahlhochbauten, ihre Theorie, Berechnung, und Bauliche Gestaltung". Vol. I, Springer, Berlin, (1932).



- [33] Maier-Leibnitz, H., "Versuche, Ausdeutung und Anwendung der Ergebnisse". *Prelim. Publ. 2nd Congr. Int. Ass. Bridge and Struct. Engng.*, 97, Berlin (1936).
- [34] Van der Broek, J.A., "*Theory of Limit Design*". John Wiley, N. York., 1948.
- [35] Greenberg, H.J. and Prager, W., "On limit design of beams and frames". *Trans. Amer. Soc. Civ. Engrs.*, 117, 447 (1952).
- [36] Gvozdev, A.A., "The determination of the value of the collapse load for statically indeterminate systems undergoing plastic deformation". *Proceedings of the Conference on plastic Deformations*, December 1936, p. 19, Akademiia Nauk S.S.R. Moscow-Leningrad (1938).
- [37] Baker, J.F., "The design of steel frames". *Struct. Engr.* 27, 397 (1949).
- [38] Neal, B.G. and Symonds P.S., "The calculation of plastic collapse loads for planes frames". *Engineer*, 194, (1952) 315-363.
- [39] Horne, M.R., "A moment distribution method for the analysis and design of structures by the plastic theory". *Proc. Instn. Civ. Engrs.* 3, Part 3, (1954) 51.

- [40] Neal, B.G. and Symonds P.S., "The rapid calculation of the plastic collapse load for a framed structure". *Proc. Instn. Civ. Engrs.*, 1, (Part 3) (1958), 58.
- [41] Neal, B.G., "*Plastic Methods of Structural Analysis*", Chapman & Hall Ltd, London, 1959.
- [42] Horne, M.R., "*Plastic Theory of Structures*", Pergamon Press, London, 1979.
- [43] Baker, J. and Heyman J., "*Plastic Design of Frames*", Cambridge University Press, London, 1969.
- [44] Heyman, J., "The Limit Design of Space Frames". *J. Appl. Mechanics*, 18 (1951), 157-162.
- [45] Charnes, A. and Greenberg, H.J., "Plastic collapse and linear programming". *Bull. Amer. Math. Soc.*, 57 (1951), 480.
- [46] Charnes, A., Lemke, C.E., and Zienkiewicz, O.C., "Virtual work, linear programming and plastic limit analysis". *Proceedings of the Royal Society*, London, A251 (1959), 110-116.
- [47] Ceradini, G., and Gavarini, C., "Calcolo a rottura e programmazione lineare". *Giornale del Genio Civile*, (1966), 103, 48-64.
- [48] Gavarini, C., "Plastic analysis of structures and duality in linear programming". *Meccanica*, 1 (1966), 95-97.

- [49] Gavarini, C., "Calcolo a rottura e programmazione nonlineare". *Rendiconti, A. Scienze Matematiche, Fisiche, Chimiche e Geologiche*, 102 (1968), 329-342.
- [50] Grierson, D.E., and Gladwell, G.M.L., "Collapse load analysis using linear programming". *Journal of the Structural Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers* 97 (1971), 1561-1573.
- [51] Cohn, M.Z., Ghosh, S.K., & Parimi, S.R., "Unified approach to theory of plastic structures". *Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, 98 (1972), 1133-1158.
- [52] Fenves, S.J., and Gonzalez-Caro, A., "Network topological formulation of analysis and design of rigid-plastic framed structures". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 3 (1971), 425-441.
- [53] Maier, G., "Mathematical Programming Methods in Structural Analysis". *Proc. Intl. Symp. Var. Meths. Engnr.* Southampton University Press. 1973, p. 8/1.
- [54] Cyras, A.A., "Mathematical Models for the Analysis and Optimization of Elastoplastic Structures", Ellis Horwood, Chichester, U.K., 1983.
- [55] Grierson, D.E., Abdel-Baset, S.B., Caron, R., "Collapse load analysis of skeletal structures". In: *Engineering Plastic*

*ticity by Plasticity by Mathematical Programming*", eds. M.Z. Cohn & G. Maier, Pergamon Press, New York, 1979 pp. 247-257.

[56] Fremond, M., "Calcul à la Rupture en Physique". *VI Escola de Matemática Aplicada*. Fev., 1985, LNCC/CNPq.

[57] Kritz, M.V., "Análise Limite e Lagos Artificiais", *VI Escola de Matemática Aplicada*, Fev., 1985, LNCC/CNPq.

[58] Anthoine, A., "Application de l'analyse convexe et de la théorie du calcul à la rupture aux circuits électriques". Thèse de Docteur-Ingénieur, Ecole Nationale de Ponts et Chaussées, Paris, 1984.

[59] Maier, G. and Munro, J., "Mathematical Programming Applications to Engineering Plastic Analysis". *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 35, No. 12, December 1982.

[60] Mangasarian, O.L., "*Nonlinear Programming*". McGraw-Hill, New York, N.Y., 1969.

[61] Mayerle, S.F., "Programação Linear com Trocas Múltiplas de Base - Implementação Computacional Usando a FPI". *Dissertação de Mestrado*, UFSC, Agosto, 1984.

[62] IBM, MPS/360, Application Description Manual GH20-0136-41, 5th edition, IBM, White Plains, N.York, 1969.

- [63] Grierson, D.E., Franchi, A., De Donato, O. and Corradi, L., "Mathematical Programming and Nonlinear Finite Element Analysis". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, North-Holland, 17/18 (1979), 479-518.
- [64] Meek, J.L., *"Matrix Structural Analysis"*. McGraw-Hill. New York, 1971.
- [65] Oden, J.T., *"Applied Functional Analysis"*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1979.
- [66] Franchi, A. and Cohn, M.Z., "Uniqueness of Solution in Limit Analysis of Structures", *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, EM5, October, 1978.
- [67] Przemieniecki, J.S., *"Theory of Matrix Structural Analysis"*, McGraw-Hill, New York, 1968.
- [68] Schrage, L. E., *"User's manual for Lindo"*, The Scientific Press, Palo Alto, CA., 1982.